I. rész

1. *a*) Oldjuk meg a $\cos 2x = 5\cos x - 3$ egyenletet, ha $x \in [-\pi; 2\pi]$. (*5 pont*)

b) Oldjuk meg a valós számok halmazán a

$$2\sqrt{\frac{x}{5}} - \sqrt{x + 2 - \sqrt{x+4}} \geq 0$$

egyenlőtlenséget. (*7 pont*)

2. Vizsgáljuk meg az $a_n = \dfrac{2n-3}{n+1}$, $n \in \mathbb{Z}^+$ sorozatot korlátosság, monotonitás és konvergencia szempontjából. Megállapításainkat igazoljuk. (*11 pont*)

3. Egy baráti társaságban 32 lapos magyar kártyával játszottak. (Itt a „színek”: piros, zöld, makk, tök; mindegyik színen belül ász, király, felső, alsó, tízes, kilences, nyolcas, hetes lapok találhatók.) Egyik este Károly feljegyezte, hogy az első tíz osztás alkalmából hány piros lapot kapott. Az 1, 3, 0, 2, 4, 2, 5, 3, 2, 4 adatokat írta fel.

a) Mennyi az átlag, módusz, medián, szórás? (*4 pont*)

Egyszer a piros lap előfordulásának törvényszerűségeit vizsgálták úgy, hogy a jól megkevert pakliból találomra kihúztak egy lapot, feljegyezték, hogy piros-e vagy sem, majd visszatették a többi közé. Ezt összesen nyolcszor végezték el.

b) Mennyi a valószínűsége, hogy legfeljebb 5-ször kaptak pirosat? (*6 pont*)

Később megváltoztatták a húzás módját, ekkor egyszerre vettek ki 8 lapot a megkevert pakliból.

c) Mennyi a valószínűsége, hogy legalább 6 piros lap van közöttük? (*3 pont*)

4. *a*) Van-e olyan másodfokú egyenlet, amelynek egyik gyöke racionális, a másik irracionális szám? (*3 pont*)

b) Van-e olyan egész együtthatós másodfokú egyenlet, amelynek egyik gyöke racionális, a másik irracionális szám? (*6 pont*)

c) Van-e olyan egyszerű gráf, amelynek 8 pontja és 29 éle van? (*3 pont*)

Ha az előbbi kérdésekre igen a válasz, adjunk példát ilyen esetre, ha nem, indokoljuk a választ.

d) Mutassuk meg, hogy az A, B kijelentések tetszőleges logikai értéke esetén $A \vee (A \wedge B) = A$. (*3 pont*)

II. rész

5. Nyári vitorlástábor 26 fiataljának úszásoktatást szerveztek fizikai erőnlétük javítása, vízi biztonságuk erősítése céljából. A táborban gyors-, mell- és hátúszás oktatására volt szakképzett oktató, így a résztvevők e három úszásnemre jelentkezhettek. Mindenkinek legalább egyet választania kellett. 17-en választották a gyorsúszást, 15-en jelentkeztek hátúszásra, 16-an pedig mellúszásra. 8 olyan, gyorsúszást választott fiatal van, aki hátúszásra nem jelentkezett. Azok közül, akik a gyorsot választották, 8-an mellre is jelentkeztek. Csupán ketten választották mindhárom úszásnemet.

a) Hány résztvevő választotta a mell- és hátúszást is? (*7 pont*)

Az oktatás végén a balatonboglári uszodában versenyt rendeztek a táborlakók számára. A leány mellúszás döntőjébe Anna, Bea, Cecília, Dóra, Edit és Flóra került.

b) Hányféleképpen végződhetett a döntő, ha tudjuk, Dóra nem lett dobogós (nem volt az első háromban), de nem is lett utolsó, továbbá Bea megelőzte Flórát, azonban kikapott Edittől? Holtverseny nem volt. (*6 pont*)

A táborzáró estén díjak, jutalmak átadására került sor. A szponzorok három értékes tárgyat sorsolással kívántak kiosztani, ezért a táborozók nevét felírták egy-egy cédulára és ezeket egy urnába dobták, majd a főszponzor kihúzott három cédulát.

c) Mennyi a valószínűsége annak, hogy mindhárom nyertes csak egy úszásnem oktatásán vett részt? (*3 pont*)

6. Az ABC háromszög csúcsainak koordinátái: $A(-10; 6)$, $B(2; -10)$, $C(11; 3)$.

a) Írjuk fel a háromszög körülírt körének egyenletét. (*4 pont*)

b) Jelölje O a körülírt kör középpontját, S a súlypontot. Írjuk fel az OS egyenes egyenletét. Milyen helyzetű az OS egyenes az AB egyeneshez viszonyítva? Igazoljuk észrevételünket. (*4 pont*)

c) Hol van a C-n átmenő magasságvonal és a körülírt kör C-től különböző metszéspontja? (*4 pont*)

d) Mekkora a háromszög területe? (*4 pont*)

7. Egy mértani sorozat első négy tagjából rendre 1-et, 2-őt, 5-öt, 11-et elvéve egy számtani sorozat négy szomszédos tagját kapjuk.

a) Mennyi a mértani sorozat első tagja és hányadosa? (*8 pont*)

Számítsuk ki az adott eljárással a számtani sorozat elemeit, majd képzeletben folytassuk mindkét irányba a sorozatot.

b) Van-e ebben a számsorban olyan szomszédos elemekből álló rész, amelyben az elemek összege 2019? Ha igen, adjuk meg az összes megoldást. Indokoljuk a választ. (*8 pont*)

8. Egységsugarú körből megfelelő körcikket kivágva, majd egyenes körkúp palástjának kialakítva tölcsért készítünk.

a) Mekkora a körcikk középponti szöge, ha a tölcsér térfogata a lehető legnagyobb? (*9 pont*)

Rendelkezésre áll egy 10×16 egység oldalú téglalap alakú lemez, amelyből az *a*) részben kapott maximális térfogatú tölcséreket szeretnénk kialakítani.

b) Tudunk-e ebből a lemezből 50 db ilyen tölcsért csinálni? Megállapításunkat indokoljuk. (*7 pont*)

9. Adott az $f(x) = \cos x$ és a $g(x) = \sin 2x$ függvény ($x \in \mathbb{R}$).

a) Írjuk fel a $h(x) = f \circ g$, illetve $k(x) = g \circ f$ függvényeket, állapítsuk meg az értékkészletüket. (*6 pont*)

b) Hol metszi egymást az $f(x)$ és $g(x)$ függvény grafikonja? Adjuk meg a metszéspontok koordinátáit. (*5 pont*)

c) Mekkora e két görbe által közrefogott síkidom területe, ha $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$? (*5 pont*)