

Projektív geometriai tételek

Ebben a cikksorozatban olyan bizonyításokat mutatunk be, amikor a geometriai alakzatokat „térbe kilépve”, három- vagy akár még magasabb dimenziós objektumok vetületeként vagy metszeteként állítjuk elő.

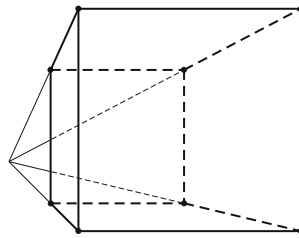
Az első részben olyan tételeket fogunk vizsgálni, amelyekben csak pontok, egyenesek és ezek illeszkedései szerepelnek, esetleg még egy kör vagy kúpszelet is. Gyakorlott versenyzők számára ezek a tételek jól ismertek, gyakran használjuk versenyfeladatok megoldásához is.

Vetítés az ablaküvegre

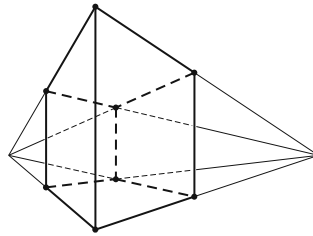
Klasszikus ábrázolási módszer, hogy a helyszínt egy üveglapon (ablakon) át nézzük, és az üvegre rajzoljuk rá a tárgyak körvonalait. Valójában a tárgyakat egy pontból – a szemünkből – vetítjük az ablak síkjára. Az ablakkeret a végtelen nagy képből vág ki egy téglalap alakú részletet.

Az ablakkal párhuzamos egyenesek vetületei az ablakon is párhuzamos egyenesek; speciálisan, ha az ablak függőleges irányú, akkor a függőleges egyenesek a képen is függőlegesek. Az ablak síkjával nem párhuzamos egyenesek képei viszont csak félegyenesek (mert nem látjuk a hátunk mögé eső részüket). Az egymással párhuzamos, de az ablakot dőlt egyenesek képei egy pontból induló félegyenesek; a közös végpont az üvegen az a pont, ahol a szemünkön keresztül húzott párhuzamos dőli az ablak síkját. Ez a közös „iránypont” az adott irányú „végtelen távoli” vagy „ideális” pont képe.

Különösen műszaki rajzokon fordul elő, hogy csak néhány, esetleg csak háromféle irányt használunk. Attól függően, hogy a fő irányok közül hány (nem) párhuzamos a kép síkjával, beszélhetünk egy, kettő vagy három iránypontos perspektíváról (1., 2. és 3. ábra).

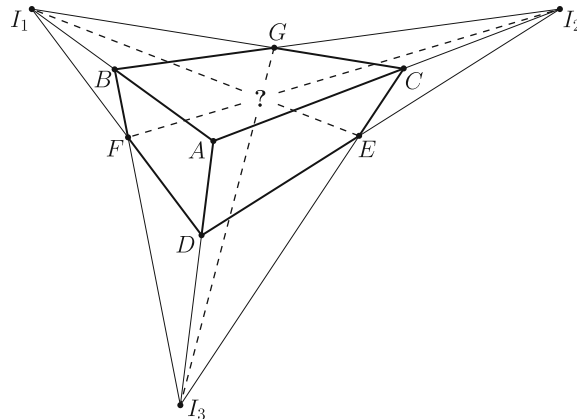


1. ábra. Egy iránypontos perspektíva



2. ábra. Két iránypontos perspektíva

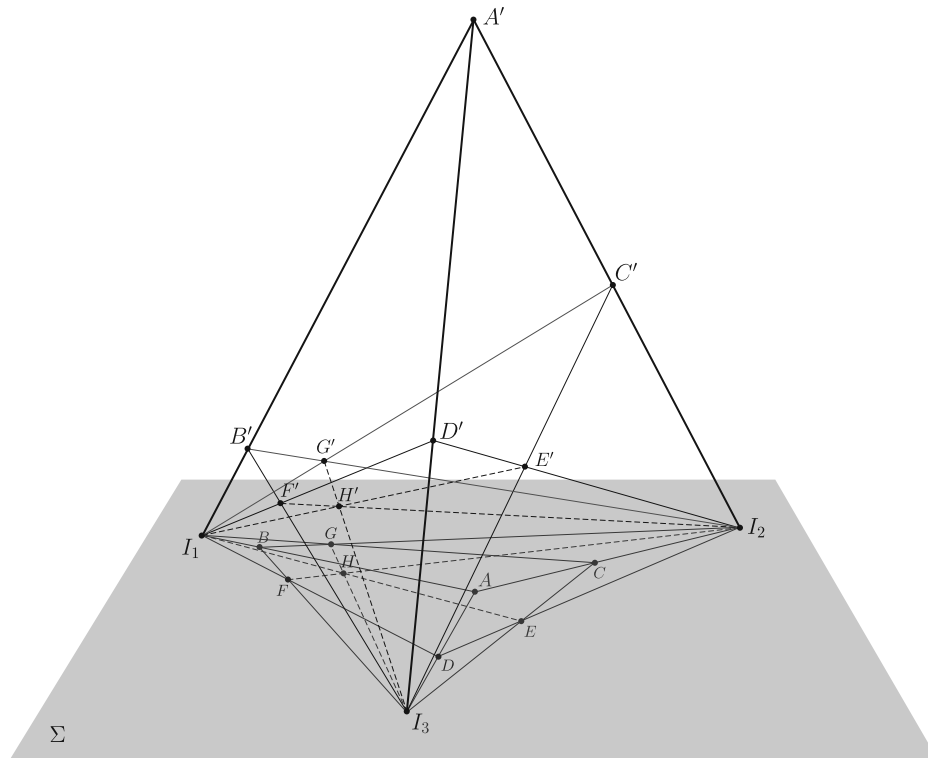
A rajzórán persze nem meresztjük a szemünket az ablaküvegen keresztül a szomszéd háztömbre; sokkal egyszerűbbnek tűnik, hogy valahogy felvesszük az iránypontokat és néhány további pontot, és vonalzóval elkezdjük összekötni. Képzeljük el, hogy a 3. ábrán látható rajzrészletet készítettük el.



3. ábra. Három iránypontos perspektíva

Ha ez a rajz egy valódi téglatest képe, akkor az I_1E , I_2F és I_3G egyenesek egy ponton, a téglatest nyolcadik csúcsának képén mennek át. Ha viszont csak úgy, találmányra vettünk fel pontokat és húztunk egyeneseket, nem lehetünk biztosak ebben. Márpedig nem szeretnénk megszegyenülve pironkodni, főleg nem a rajztanár előtt. („Látod, kisfiam, ha nem csaltál volna, az a három egyenes egy ponton menne át ...!”) Szerencsére a vetítést visszafelé is el tudjuk végezni, és ki tudunk találni valamilyen térbeli alakzatot, amelynek a rajzrészletünk a vetülete. Azt is meg lehetne próbálni, hogy „valódi” párhuzamosokat találjunk a térben, de erre nem lesz szükség.

Jelöljük Σ -val a rajzunk síkját. Vegyünk fel a térben egy új A' pontot, ami nincs a Σ -ra való merőleges vetülete éppen az A pont. Az I_1A , I_2A és I_3A szakaszokon legyen rendre B' , C' , illetve D' az a belső pont, amelynek merőleges vetülete Σ -ra B , C , illetve D . Az I_1I_2A' háromszögben az I_1C' és I_2B' Ceva-szakaszok¹ metszéspontja legyen G' . Mivel az I_1C' és I_2B' merőleges vetülete Σ -n I_1C és I_2B , ugyanez igaz a metszéspontjaikra: a G' merőleges vetülete Σ -n a G pont. Hasonlóan, legyen I_1D' és I_3B' metszéspontja F' , és legyen I_2D' és I_3C' metszéspontja E' ; ezek vetülete Σ -n F , illetve E (4. ábra).



4. ábra. Térbeli rekonstrukció a három iránypontos perspektívából

Most tekintsük az I_1I_2D' , I_1I_3C' , és I_2I_3B' háromszögek síkjait, jelölje ezeket Σ_{12} , Σ_{13} , illetve Σ_{23} . A Σ_{12} és Σ_{13} síkoknak I_1 és E' is közös pontja, tehát a két sík metszésvonala az I_1E' egyenes. Hasonlóan, Σ_{12} és Σ_{23} metszésvonala az I_2F' , Σ_{13} és Σ_{23} metszésvonala az I_3G' egyenes.

Az I_1I_2D' háromszögben az I_1E' és I_2F' Ceva-szakaszok a háromszög belsejében metszik egymást; a metszéspontjukat jelöljük H' -vel. Mivel I_1E' az Σ_{12} és Σ_{13} , I_2F' pedig az Σ_{12} és Σ_{23} síkok metszete, a metszéspont mindhárom síknak közös pontja. Ezért a H' ponton a Σ_{13} és Σ_{23} síkok metszésvonala, az I_3G' egyenes is átmegy. Ha a H' pont Σ -ra való vetületét elnevezzük H -nak, akkor azt kaptuk, hogy I_1E , I_2F , I_3G egyenesek egy ponton, H -n mennek át.

Három sík, három egyenes

Az előző bizonyítás fő lépését érdemes általánosabban is végiggondolni és kimondani. A következő tényt nagyon gyakran alkalmazhatjuk térbe kilépő bizonyításokban.

Lemma.² *Ha adott három egyenes úgy, hogy közülük bármelyik kettő egy síkban van (tehát metszik egymást vagy párhuzamosak), de a három egyenes együtt nincs egy síkban, akkor a három egyenes vagy egy ponton megy át, vagy pedig párhuzamosak egymással.*

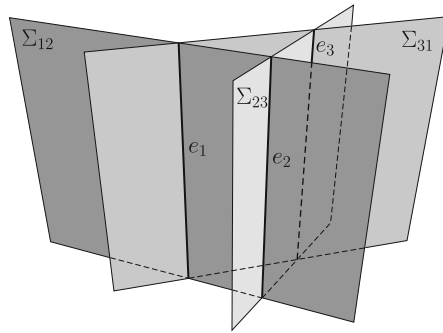
A Lemma bizonyítása. Jelölje a három egyenest e_1 , e_2 és e_3 , és legyen $i = 1, 2, 3$ esetén $\Sigma_{i,i+1}$ az e_i és az e_{i+1} egyenesek síkja. (Szokás szerint ciklikusan indexelünk: e_4 azonos e_1 -gyel, és e_5 azonos e_2 -vel.)

¹ Olyan szakaszok, amelyek a háromszög egyik csúcsát a szemközti oldal egyik pontjával kötik össze.

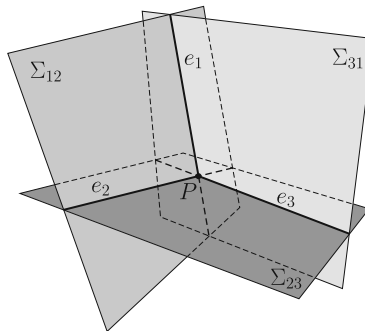
² A görög „λήμμα” szó jelentése *kapott valami, például ajándék, profit vagy korrupt pénz*. Matematikában olyan állítást, tételt jelent, ami nem önmagában érdekes, hanem más tételek bizonyításához használjuk fel. A „lemma” helyett a „segédétel” vagy „segédállítás” szavakat is írhatnánk.

Először is vegyük észre, hogy az e_1 egyenes nem lehet a Σ_{23} síkban – mert akkor akkor mindhárom egyenes ebben a síkban lenne –, ezért e_1 biztosan különbözik e_2 -től és e_3 -tól. Ugyanígy láthatjuk, hogy e_2 és e_3 egymástól is különbözik. Két különböző egyenesre legfeljebb csak egyféle sík illeszthető, ezért a Σ_{12} , Σ_{23} és Σ_{31} síkok egyértelműen meghatározottak. Mivel a három egyenes nincs egy síkban, a Σ_{12} , Σ_{23} és Σ_{31} síkok különbözők. A $\Sigma_{i+2,i}$ és $\Sigma_{i,i+1}$ metszészvonala az e_i egyenes mindegyik i indexre.

Két, egy síkban fekvő egyenes vagy párhuzamos, vagy metszi egymást. Ha a három egyenes párhuzamos akkor készen vagyunk, a Lemma állítása teljesül (5. ábra). Ellenkező esetben a három közül valamelyik két egyenes, mondjuk e_1 és e_2 metszi egymást egy P pontban. A P az e_1 egyenesen van, ami viszont a Σ_{12} és Σ_{31} síkok metszete. Ugyanígy a P ponton az e_2 egyenes is átmegy, ami a Σ_{12} és Σ_{23} síkok metszészvonala. A P pont tehát mindhárom síkra illeszkedik; emiatt P közös pontja a Σ_{23} és Σ_{31} síkoknak; akkor viszont ezek metszészvonala, a harmadik, e_3 egyenes is átmegy P -n (6. ábra).



5. ábra. e_1 , e_2 , e_3 párhuzamosak



6. ábra. e_1 , e_2 , e_3 metszőek

Két klasszikus projektív geometriai tétel

A Lemma alkalmazására két példát mutatunk.

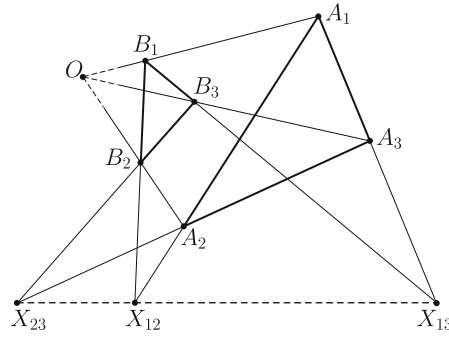
Desargues³ tétele: Legyen $A_1A_2A_3$ és $B_1B_2B_3$ két háromszög a síkon, amelyek csúcsai és oldalegyenesei is különbözők. Legyen az A_1A_2 és B_1B_2 egyenesek metszéspontja X_{12} , az A_1A_3 és B_1B_3 egyenesek metszéspontja X_{13} , és az A_2A_3 és B_2B_3 egyenesek metszéspontja X_{23} . A következő két állítás ekvivalens:

(a) A két háromszög megfelelő csúcsait összekötő A_1B_1 , A_2B_2 és A_3B_3 egyenesek egy ponton mennek át vagy párhuzamosak.

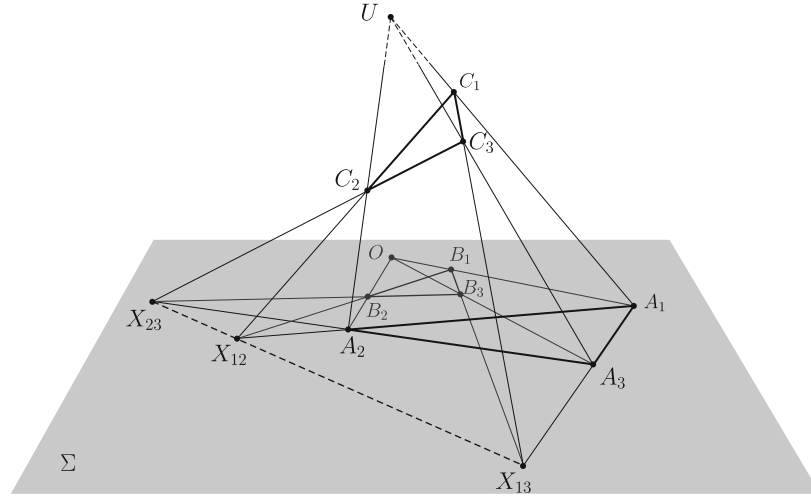
(b) A két háromszög megfelelő oldalainak metszéspontjai, vagyis az X_{12} , X_{13} és X_{23} pontok egy egyenesre esnek (7. ábra).

A tétel bizonyítása azon múlik, hogy ez a tíz pontból és tíz egyenesből álló elrendezés egy térbeli geometriai alakzat vetülete (8. ábra).

³Gérard Desargues francia matematikus és építész, 1591–1662.



7. ábra. A Desargues-tétel



8. ábra. A Desargues-tétel bizonyítása

Az (a) $\Rightarrow$ (b) irány bizonyítása:

Az ábra síkját most is jelöljük Σ -val. Ha az A_1B_1 , A_2B_2 és A_3B_3 egyenesek az O ponton mennek át, akkor vegyünk fel a térben egy U pontot, amelynek merőleges vetülete a Σ síkon O . Az UA_1 , UA_2 és UA_3 egyeneseken legyen C_1 , C_2 , illetve C_3 az a pont, amelynek vetülete B_1 , B_2 , illetve B_3 . Ha A_1B_1 , A_2B_2 és A_3B_3 párhuzamosak, akkor vegyünk a térben, az A_1 , A_2 , A_3 pontokon keresztül három, egymással párhuzamos egyenest, amelyek merőleges vetülete éppen A_1B_1 , A_2B_2 , illetve A_3B_3 , és ezeken vegyük fel azokat a C_1 , C_2 , illetve C_3 pontokat, amelynek vetülete B_1 , B_2 , illetve B_3 .

Alkalmazzuk most a Lemmát az A_1A_2 , B_1B_2 és C_1C_2 egyenesekre. Az A_1A_2 és B_1B_2 egyenesek a Σ síkban fekszenek; a C_1C_2 a B_1B_2 -n keresztül Σ -ra állított merőleges síkban, végül az A_1A_2 és C_1C_2 egyenesek az A_1C_1 és A_2C_2 egyenesek síkjában vannak. A C_i pontok nem lehetnek a Σ síkban, mert akkor a teljes A_1C_1 egyenes, és vele az U pont is Σ -ban lenne. A Lemma feltételei teljesülnek: az A_1A_2 , B_1B_2 és C_1C_2 egyenesek közül bármelyik kettő egy síkban van, de a három egyenes együtt nincs egy síkban. Ezért a három egyenes egy ponton megy át; mivel A_1A_2 és B_1B_2 az X_{12} pontban metszi egymást, ez azt jelenti, hogy a C_1C_2 egyenes is átmegy az X_{12} ponton. Az indexek permutálásával ugyanígy láthatjuk, hogy a C_{13} egyenes átmegy X_{13} -on, illetve C_{23} átmegy X_{23} -on.

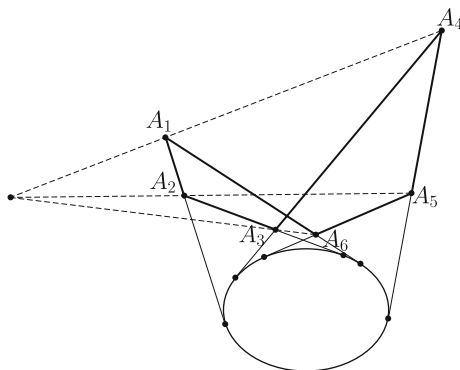
Ezek után az X_{12} , X_{13} , X_{23} pontok mind közös pontjai az $C_1C_2C_3$ és a Σ síknak, ezért egy egyenesen vannak.

A (b) $\Rightarrow$ (a) irány bizonyítása:

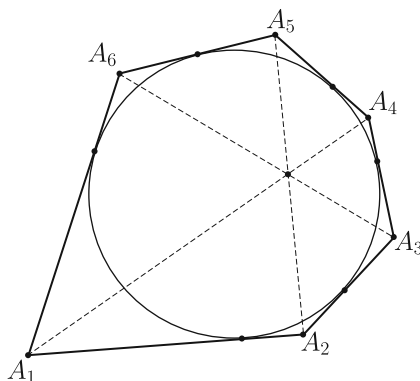
Ugyanezt a térbeli ábrát építjük fel, csak fordított sorrendben. Az $X_{12}X_{13}X_{23}$ egyenesen keresztül fektessünk egy Σ' síkot, ami különbözik Σ -tól, de nem merőleges rá, és ezen jelöljük ki azokat a C_1, C_2, C_3 pontokat, amelyek Σ -ra eső merőleges vetülete B_1, B_2 , illetve B_3 . A C_1, C_2, X_{12} pontok közös pontjai az Σ' síknak és a B_1B_2 egyenesen keresztül Σ -ra állított merőleges síknak, ezért egy egyenesre, a két sík metszéspontjára esnek. Ugyanígy látható, hogy C_1, C_3 és X_{13} , valamint C_2, C_3 és X_{23} is egy egyenesre esik.

A Lemmát most az A_1C_1 , A_2C_2 , A_3C_3 egyenesekre alkalmazzuk. Bármely $1 \leq i < j \leq 3$ indexpárra az A_iC_i és A_jC_j egyenesek az $A_iC_iX_{ij}$ síkban vannak, tehát a három egyenes közül bármelyik kettő egy síkban van; ugyanakkor az $A_1, A_2, A_3, C_1, C_2, C_3$ pontok nincsenek egy síkban. A Lemma szerint tehát az A_1C_1 , A_2C_2 , A_3C_3 egyenesek egy ponton mennek át vagy párhuzamosak. A három egyenest visszavetítve Σ -ra látjuk, hogy az A_1B_1 , A_2B_2 , A_3B_3 egyenesek egy ponton mennek át vagy párhuzamosak.

Brianchon⁴ tétele: Ha az $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ (esetleg hurokolt) hatszög oldalegyenesei érintői egy nem elfajuló kúpszeletnek (kör, ellipszis, parabola vagy hiperbola), akkor a hatszög szemközti pontjait összekötő A_1A_4 , A_2A_5 és A_3A_6 egyenesek egy ponton mennek át vagy párhuzamosak (9. ábra).



9. ábra. A Brianchon-tétel

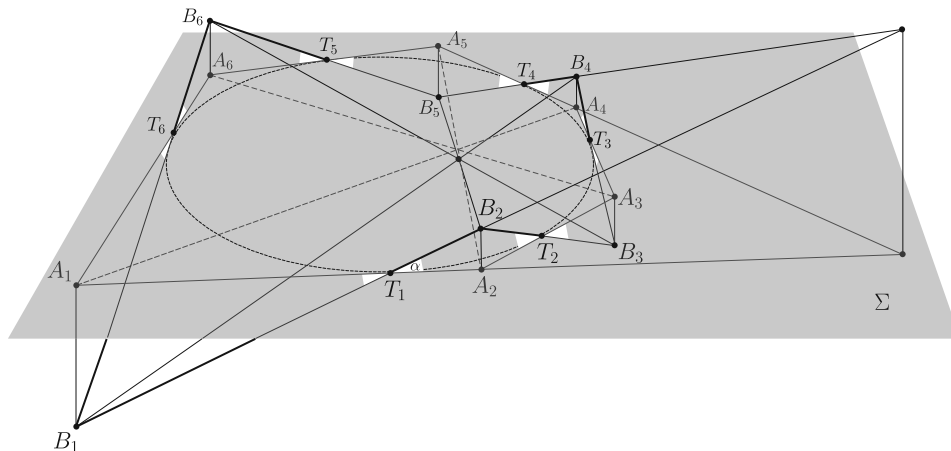


10. ábra. A Brianchon-tétel érintőhatszögben

A tételnek számtalan változatát, speciális és határesetét lehetne felsorolni, az egybeeső oldalegyenesek esetétől a (parabolát érintő) végtelen távoli oldal esetéig. A kedves Olvasónak ajánljuk, hogy valamilyen számítógépes programmal, mint például a GeoGebra, próbáljon minél többféle speciális vagy elfajuló esetet keresni. Itt most nem célunk ezeknek az áttekintése; a tételnek csak az egyik legegyszerűbb esetét fogjuk bizonyítani.

Brianchon tétele, speciális eset: Ha az $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ konvex hatszögbe kört lehet írni, akkor a hatszög A_1A_4 , A_2A_5 és A_3A_6 átlói egy ponton mennek át (10. ábra).

Bizonyítás a speciális esetre. Az ábra síkját most is Σ -val fogjuk jelölni. A hatszögbe írt kör érintési pontjai legyenek $T_1, \dots, T_6$ a 11. ábra szerint. Válasszunk egy α hegyesszöget, és jelöljük ki a térben



11. ábra. A Brianchon-tétel bizonyítása

⁴Charles Julien Brianchon francia matematikus, 1783–1864.

azokat a $B_1, \dots, B_6$ pontokat, amelyek felváltva Σ két oldalán helyezkednek el, merőleges vetületük a Σ síkon rendre $A_1, \dots, A_6$, és az $A_i T_i B_i \angle$ és $A_i T_{i-1} B_i \angle$ szögek mindegyike α nagyságú. Mivel a körhöz húzott érintő szakaszok egyenlők, mindegyik i indexre $A_i T_i = A_i T_{i-1}$, így az $A_i T_i B_i$ és $A_i T_{i-1} B_i$ derékszögű háromszögek egybevágók, és az $A_i T_i B_i \angle$ és $A_i T_{i-1} B_i \angle$ szögek automatikusan egyenlők. (Úgy is mondhatnánk, hogy a hatszög oldalegyeneseit Σ -ra merőlegesen α szöggel megdöntjük, és az így kapott egyeneseknek vesszük a metszéspontjait.)

A Lemmát most a $B_1 B_4$, $B_2 B_5$ és $B_3 B_6$ egyenesekre alkalmazzuk. A $B_1 B_2$ és $B_4 B_5$ egyenesek egymás tükörképei a $T_1 T_4$ szakasz felező merőleges síkjára, ezért egy síkban vannak; ebben a síkban fekszik a $B_1 B_4$ és a $B_2 B_5$ egyenes. Ugyanígy láthatjuk, hogy a $B_2 B_5$ és $B_3 B_6$, illetve a $B_3 B_6$ és $B_1 B_4$ egyenesek egy síkban vannak.

Hátra van még annak ellenőrzése, hogy a $B_1 B_4$, $B_2 B_5$ és $B_3 B_6$ egyenesek nem lehetnek egy síkban; ez nyilvánvalónak látszik, de formálisabban is igazolhatjuk: ha a $B_1 B_4$, $B_2 B_5$ és $B_3 B_6$ egyenesek valamilyen síkban vannak, akkor ebben a síkban vannak a $B_1, \dots, B_6$ pontok, a teljes $B_1 \dots B_6$ töröttvonal, és vele együtt a $T_1, \dots, T_6$ pontok is. A $T_1, \dots, T_6$ pontok síkja csak a Σ lehet, de ez nem lehetséges, mert a B_1 pontokat Σ -n kívül vettük fel.

A Lemma feltételei tehát teljesülnek, ezért a $B_1 B_4$, $B_2 B_5$ és $B_3 B_6$ egyenesek egy ponton mennek át vagy párhuzamosak. Ugyanez igaz a merőleges vetületeikre, az $A_1 A_4$, $A_2 A_5$ és $A_3 A_6$ egyenesekre is. Mivel azonban az $A_1 A_4$, $A_2 A_5$ és $A_3 A_6$ átlók közül bármelyik kettő metszi egymást, ez csak úgy lehet, ha a három átló egy ponton megy át.

Ajánlott irodalom

A fenti tételek teljesebb tárgyalásához be kellene vezetnünk a projektív sík és tér „ideális” objektumait, ez most nem volt célunk. Emiatt a tételeket sem mondtuk ki legáltalánosabb formájukban.

Ha valaki szeretne többet tanulni a projektív geometriáról, annak a következő könyveket ajánlom.

- [1] Reiman István: *A geometria és határterületei*. Gondolat, Budapest, 1986.
- [2] H. S. M. Coxeter: *Projektív geometria*. Gondolat, Budapest, 1986.

Feladatok

1. Igazoljuk, hogy a 3. ábrán az AG , CE és DF szakaszok egy ponton mennek át.
2. Egy perspektivikus képen, csak egyenes vonalzót használva, hogyan jelölhetünk ki egyenlő szakaszokat egy egyenesen? Hogyan többszörözhetünk, felezhetünk vagy harmadolhatunk egy szakaszt?
3. Vezessük le a Desargues-tételből, hogy a háromszög súlyvonalai egy ponton mennek át.
4. Az ABC háromszög beírt köre az oldalakat az A_1 , B_1 , C_1 pontokban érinti. Jól ismert, hogy az AA_1 , BB_1 , CC_1 Ceva-szakaszok egy ponton, a háromszög Gergonne-pontján mennek át. Gondoljuk meg, hogy ez a tény a Brianchon-tételnek milyen elfajuló esete, és igazoljuk közvetlenül, térbe kilépéssel is.
5. Az $ABCD$ érintőnégyszög beírt köre az AB , BC , CD , DA oldalakat rendre az E , F , G , illetve H pontban érinti. Mutassuk meg, hogy az AC , BD , EG és FH szakaszok egy ponton mennek át.
6. Legyen $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6$ érintőhatszög, legyen az $A_1 A_3$ és $A_4 A_6$ egyenesek metszéspontja P , az $A_2 A_4$ és $A_5 A_1$ egyenesek metszéspontja Q , az $A_3 A_5$ és $A_6 A_2$ egyenesek metszéspontja R . Mutassuk meg, hogy a P , Q és R pontok egy egyenesen vannak.