

I. rész

1. Dani kerékpárversenyre készül. Először hegynek felfelé, utána vízszintes terepen, majd lejtőn lefelé hajtja a biciklit, ezután visszafelé ugyanezen az útvonalon hajt végig. Lejtőn lefelé $60 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, vízszintes terepen $40 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, míg hegynek felfelé $20 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ állandó sebességgel képes haladni. Az odafele utat 1,75 óra alatt, míg a visszafele utat 2,25 óra alatt tette meg. Milyen hosszúak az egyes útszakaszok, ha oda-vissza összesen 130 km-t biciklizett?

(Közben sehol sem állt meg, a visszafordulás idővesztés nélkül zajlódik le.)

(13 pont)

2. Tekintsük a következő állításokat.

A: Meg tudunk úgy adni végtelen sok prímét, hogy bármely kettő összege ne legyen prím.

B: Ha az a_n^2 sorozat konvergens, akkor a_n is konvergens.

C: Ha öt különböző természetes szám összege osztható öttel, akkor öttel osztva különböző maradékot adnak.

a) Döntsük el, hogy igazak vagy hamisak az állítások. Válaszainkat indokoljuk.

(8 pont)

b) Fogalmazzuk meg a C állítás megfordítását. Döntsük el, hogy igaz vagy hamis az állítás megfordítása. Válaszunkat indokoljuk.

(4 pont)

3. a) Döntsük el, hogy az implikáció asszociatív művelet-e, azaz tetszőleges A ; B ; C kijelentések esetén fennáll-e, hogy $(A \rightarrow B) \rightarrow C = A \rightarrow (B \rightarrow C)$.

(4 pont)

b) Határozzuk meg azon $P(x; y)$ pontok halmazát a derékszögű koordinátarendszerben, amelyek koordinátáira igaz, hogy $PA^2 + PB^2 = 22$, ahol $A(1; 2)$ és $B(3; 0)$.

(8 pont)

4. Legyen A a $2^x + 2^{1-x} \leq 3$ egyenlőtlenség megoldáshalmaza, B pedig az alábbi két függvény értékkészletének közös része:

$$f(x) = \frac{2}{3} \cdot \sin(2019\pi x) \quad \text{és} \quad g(x) = 4x^2 - 4x + \frac{3}{2}.$$

a) Határozzuk meg az A halmazt.

(5 pont)

b) Határozzuk meg a megadott függvények értékkészletét és a B halmazt.

(7 pont)

c) Hány eleme van az $(A \setminus B) \cap \mathbb{Z}$ halmaznak, ahol $\mathbb{Z}$ az egész számok halmazát jelöli?

(2 pont)

II. rész

5. a) Egyik este Anna, Bea, Csilla, Dóra és Emese elmentek vacsorázni a közeli pizzázóba. Mindannyian másféle pizzát rendeltek. A pincér még új, így a rendelt ételeket véletlenszerűen osztotta ki a lányoknak (de azokat hozta ki, amiket rendeltek). Jelölje X azt a valószínűségi változót, amely azt adja meg, hogy hányan kapták a saját rendelésüket. Határozzuk meg X várható értékét.

(8 pont)

b) Oldjuk meg az alábbi egyenletet a pozitív egész számok halmazán:

$$2^n - 1 = m^2.$$

(8 pont)

6. a) Egy derékszögű háromszög beírt és köré írt körének sugarát jelölje r és R . Mekkora a háromszög oldalai, ha tudjuk, hogy $r + R = 31$ és $rR = 150$?

(8 pont)

b) Egy szabályos ötszög mindegyik oldalát kiszínezzük három adott szín valamelyikével. Hányféleképpen tehetjük ezt meg, ha két színezést nem tekintünk különbözőnek, ha forgatással egymásba vihetők?

(8 pont)

7. a) A lappföldi Mikulásnak két rénszarvasa van: Vágta és Éppenhogycsak. Ha valamelyik nap Vágta egyedül x sebességgel ($x > 1$) húzná a szánt, akkor Éppenhogycsakot melléfogva az még $1/x$ sebességet tud hozzáadni. A Mikulás már öreg, emiatt ijedős. Minél gyorsabban megy a szán, annál többször fogja vissza az állatokat. A precíz mérések szerint, ha Vágta x sebességgel húzná a szánt, akkor ez éppen $\ln x$ sebességsökkenést eredményez. Egyszer egy ellenőrzésnél azzal vádolják meg a Mikulást, hogy lassan hajtott. Lappföldön a lassúhajtás határa $7/4$. Meg tudja-e védeni magát a Mikulás?

(Használjuk fel, hogy $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.)

(9 pont)

b) A sakk egy érdekes változata az ún. Fischer random sakk, melyet Robert Fischer amerikai világbajnok hozott létre 1996-ban. A lényegi eltérés a tisztek (király (K), vezér (V), 2 bástya (B), 2 huszár (H), 2 futó (F)) elhelyezkedésében rejlik.

Az alapállás szabályai:

- A király a bástyák között foglal helyet.
- A futók ellentétes színű mezőn állnak.

A felsorolt tiszteket az alábbi 1×8 -as táblázatba kell elhelyezni (az *ábrán* egy helyes kitöltés látható):

F	H	B	F	H	K	B	V
----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------

Az azonos minőségű tisztek között (pl. két huszár stb.) csak a futóknál van megkötés arra, hogy szükségszerűen különböző színben kell állniuk.

Mutassuk meg, hogy 960 megengedett alapállás lehetséges a Fischer random sakkban. (7 pont)

8. a) Egy tizenkét elemű, egész számokból álló mintából ismerünk hét értéket: 4; 4; 4; 5; 7; 9; 13. Tudjuk, hogy a minta egyetlen módusza 5 és a minta átlagának szórás sugarú környezete három tizedesjegyre kerekítve $[\bar{x} - \sigma; \bar{x} + \sigma] =]3,292; 8,708[$. Határozzuk meg a minta hiányzó öt elemét. (8 pont)

b) Egyenlő szárú háromszög szára 13 cm, alapja 24 cm. Számítsuk ki a háromszög súlypontjának a háromszög köré írható kör középpontjától való távolságát. (8 pont)

9. a) Bence nemrég tanulta az iskolában a szinusztételt és a koszinusztételt. Sajnos rosszul emlékezett rájuk és azokat az alábbi módon jegyezte meg (a jelölések a szokásosak):

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cdot \sin \gamma \quad \text{és} \quad \frac{a}{b} = \frac{\cos \alpha}{\cos \beta}.$$

Mekkorák annak a háromszögnek a szögei, amelyre igazak a Bence által megtanult összefüggések? (7 pont)

b) Határozzuk meg az a ; b ; c egész paraméterek értékét úgy, hogy az $f(x) = ax^2 + bx + c$ egyenletű parabola az alábbi feltételek mindegyikét teljesítse.

1. $f'(3) = -11$.

2. $\int_{-1}^1 f(x) dx = \frac{2}{3}$.

3. Csúcsponja illeszkedik az $y = \frac{1}{2}x + 1$ egyenletű egyenesre. (9 pont)