

1. Legyenek egy háromszög oldalai $a \leq b \leq c$. Határozzuk meg az $\frac{(a+b+c)^2}{b \cdot c}$ lehető legjobb alsó és felső korlátját. Milyen háromszög esetén veszi fel a kifejezés ezeket az értékeket?

2. Az $a_1, a_2, \dots, a_{2^n}$ számsorozat minden elemének abszolút értéke 1. Képezzük ezekből az $a_1 \cdot a_2, a_2 \cdot a_3, \dots, a_{2^n} \cdot a_1$ sorozatot, majd ebből ugyanilyen módon újabbat. Mutassuk meg, hogy legfeljebb 2^n lépésben olyan sorozathoz jutunk, melynek minden eleme 1.

3. Adott n darab 1 abszolút értékű szám: $a_1, a_2, \dots, a_n$. Bizonyítsuk be, hogy

$$2 \sin \left[\frac{\pi}{4} \left(a_1 + \frac{a_1 a_2}{2} + \frac{a_1 a_2 a_3}{2^2} + \frac{a_1 a_2 \dots a_n}{2^{n-1}} \right) \right] = a_1 \sqrt{2 + a_2 \sqrt{2 + \dots + a_n \sqrt{2}}}.$$

4. Mutassuk meg, hogy bármilyen $n \geq 4$ egész számra $n!$ és $(n+1)!$ között mindig van legalább egy olyan egész szám, amely n^3 -al osztható!

5. Az $a_1, a_2, \dots$ számsorozatot a következő rekurzív formulával definiáljuk:

$$a_1 = A, \quad a_2 = B, \quad a_n = \frac{a_{n-1}^2 + C}{a_{n-2}} \quad (n > 2).$$

Bizonyítsuk be, hogy ha A, B és $\frac{A^2 + B^2 + C}{A \cdot B}$ egész számok, akkor a sorozat minden tagja egész szám!

6. Mutassuk meg, hogy a $9kx^2(x-1) + t(9x-1) = 0$ egyenlet gyökei ($k \neq 0$, k és t valós számok) nem lehetnek egymástól különböző pozitív valós számok!

7. Adott a térben $2n$ ($n > 1$) darab különböző pont, közülük semelyik négy nincs egy síkban. Tekintsük a pontok által meghatározott szakaszokat. Mutassuk meg, ha kiválasztunk közülük legalább $(n^2 + 1)$ -et, akkor mindig lesz legalább 3 különböző pont, amelyek közti mindhárom szakasz a kiválasztottak között van. Mutassuk meg, hogy az állítás $(n^2 + 1)$ -nél kevesebb szakasz kiválasztása esetén nem mindig teljesül!

8. Minden $0 < \frac{p}{q} < 1$ racionális számra (p és q relatív prím egészek) tekintsük a $(\frac{p}{q} - \frac{1}{4q^2}), (\frac{p}{q} + \frac{1}{4q^2})$ intervallumot.

Mutassuk meg, hogy $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ezek egyikéhez sem tartozik hozzá!

9. Legyen S a racionális számoknak egy olyan részhalmaza, amelyre

(1) ha $a, b \in S$, akkor $a + b \in S$ és $a \cdot b \in S$;

(2) bármely racionális r esetén az $r \in S, -r \in S, r = 0$ közül pontosan az egyik teljesül.

Bizonyítsuk be, hogy S éppen a pozitív racionális számok halmaza!

10. Legyenek $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}$ valós számok, továbbá $a_0 = a_{n+1} = 0$. Mutassuk meg, hogy van olyan $0 \leq k < n$ természetes szám, hogy bármely $a_{k+1} + \dots + a_r$ ($k+1 \leq r \leq n+1$) részösszeg nem negatív, és bármely $a_k + a_{k-1} + \dots + a_s$ ($0 \leq s \leq k$) részösszeg nem pozitív!