

I. rész

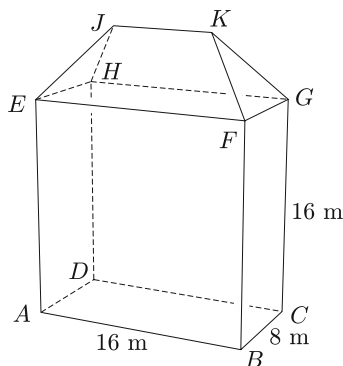
1. a) A 2, 0, 1, 9 számjegyekből az összes lehetséges módon háromjegyű természetes számokat képeztünk. Számítsuk ki annak a valószínűségét, hogy a képzett számok közül egyet véletlenszerűen kiválasztva, annak számjegyei különbözők. (3 pont)

b) Oldjuk meg a $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ halmazon a $\sin(x + 2019\pi) = -\frac{1}{2}$ egyenletet. (8 pont)

2. A Regéci Vár egy 1300 körül épült vár, ahol II. Rákóczi Ferenc fejedelem a gyermekkorát töltötte. Az 1. ábrán ennek a várnak a XIV. századi állapota látható, a 2. ábrán pedig egy vázlatos képet láthatunk annak tornyáról.



1. ábra



2. ábra

A torony az $ABCDEFGH$ téglatestből és az $EFGHJK$ tetőből áll. A tornyot alkotó téglatest külső méretei: $AB = 16$ m, $BC = 8$ m és $CG = 16$ m.

a) Mekkora az oldalfalak térfogata, ha a fal vastagsága 2 m és az összes faltérfogatot az ablakok, ajtók és lőrések 5%-kal csökkentik? (4 pont)

Tudjuk, hogy az $EFGHJK$ tető magassága 5 méter, és az EJH és FKG egyenlő szárú háromszögek síkjai 50° -os szöget zárnak be az $EFGH$ síkkal.

b) Mekkora a JK szakasz hossza? (5 pont)

A vár 2018-as rekonstrukciója során gimnazisták több napon keresztül segítették a régészek munkáját. A diákok 60%-a ásásban, 30%-a feltárásban, és 45%-a talicskázásban segített. Egyféle munkát 29-en végeztek, pontosan kétféle munkafolyamatban a tanulók $\frac{1}{5}$ része, mindháromban pedig 7,5%-a vett részt.

c) Hány tanuló vett részt összesen a munkálatokban? (3 pont)

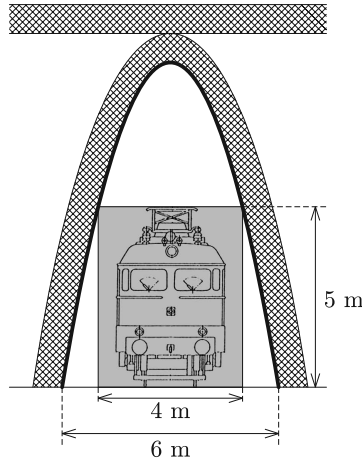
3. a) Oldjuk meg az alábbi egyenlőtlenséget a valós számok halmazán.

$$\log_2 x \leq \log_{\frac{1}{2}}(4x) \quad (7 \text{ pont})$$

b) Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert, ahol x és y nemnegatív valós számok.

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{x} - \sqrt{y} &= 8, \\ \sqrt{xy} &= 33. \end{aligned} \right\} \quad (7 \text{ pont})$$

4. A vasúti szaknyelvben úrszelvénynek nevezik a szerelvények akadálytalan áthaladásához szükséges térnek a vágányokra merőleges keresztmetszetét. A nemzetközi szabványok szerint az úrszelvény jellemzően 4 m széles és 5 m magas. Az alakja általában követi a szerelvény alakját, de az egyszerűség kedvéért ez legyen most az ábrán szürkével jelzett téglalap. A vasút egy olyan híd alatt halad át, amelynek acél tartószerkezete parabolaív alakú. A tartószerkezet belső íve (az ábrán vastag fekete vonallal) a sínek szintjén 6 m széles és éppen nem lóg be az úrszelvénybe.



a) Milyen magas a híd tartószerkezete a belső ívének középső, legmagasabb pontján? (8 pont)

A vasútvonal áthalad egy olyan 24 méter hosszú, egyenes alagúton is, amelynek keresztmetszete parabolaszélet alakú. A parabolaszéletet a koordináta-rendszerben megadott

$$y = -\frac{1}{2}x^2 + 8$$

egyenletű parabola és az x tengely határolja. A koordináta-rendszerben 1 egység 1 métert jelent.

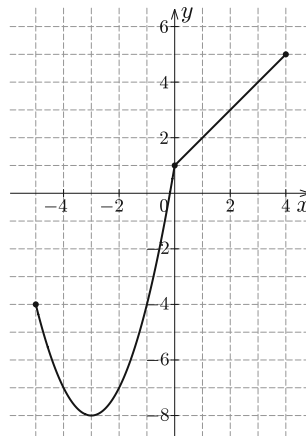
b) Hány m^3 követ kellett kitermelni az alagút építése közben? Válaszunkat egészre kerekítve adjuk meg. (6 pont)

II. rész

5. a) Határozzuk meg azt a legkisebb, különböző számjegyekből álló 6-jegyű természetes számot, amely a 0; 1; 2; 3; 4; 5 számjegyekből áll és osztható 12-vel. (5 pont)

b) A $\{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$ halmaznak hány részhalmaza tartalmaz legalább 1 db páratlan számot? (3 pont)

c) Adjuk meg az ábrán látható függvény hozzárendelési szabályát, és számítsuk ki a függvény $E(-1; -4)$ pontjában húzott érintőjének meredekségét. (8 pont)



6. Tekintsük az $a_n = n^2 + 2$ sorozatot.

a) Határozzuk meg a $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n}$ határértéket. Válaszunkat indokoljuk. (2 pont)

b) Számítsuk ki az (a_n) sorozat első száz tagjának összegét. (4 pont)

Az (a_n) sorozat egymást követő tagjai segítségével a $b_n = a_{n+1} - a_n$ sorozatot képeztük.

c) Igazoljuk, hogy a (b_n) sorozat számtani sorozat. (3 pont)

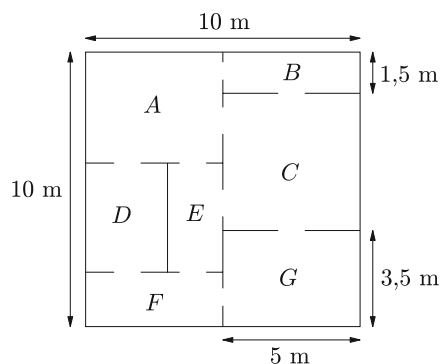
d) Igazoljuk teljes indukcióval, hogy az (a_n) sorozat $a_1 = 3$ és $n > 1$ esetén megadható az

$$a_n = \left(1 + \frac{2n-1}{n^2-2n+3}\right) \cdot a_{n-1}$$

rekurzióval is.

(7 pont)

7. Az ábrán egy családi ház földszintjének alaprajza látható a benne lévő hét helyiséggel és az ajtókkal együtt. A rajzon feltüntettük a földszint és néhány helyiség méretét is. (A földszinti bejárati ajtó nem szerepel az ábrán, mert a megoldáshoz az nem szükséges.)



a) A házban lévő helyiségeket és az ajtókat egy gráffal szemléltethetjük úgy, hogy a gráf csúcsai (A, B, C, D, E, F, G) a helyiségeket jelölik, a gráf két csúcsa között pedig pontosan akkor vezet él, ha a két csúcsnak megfelelő helyiség között van ajtó. Rajzoljuk fel a családi ház földszintjének gráfját (a csúcsok azonosításával együtt), és határozzuk meg a felrajzolt gráfban a fokszámok összegét. (3 pont)

A lakás fölött a földszinttel megegyező méretű padlás, a ház alapterületének negyede alatt pince is van. A család macskája a pince padlóján fele olyan szívesen, a padláson viszont kétszer olyan szívesen van, mint a földszinten.

b) Mekkora valószínűséggel fekszik a macska a C jelű szobában? (8 pont)

c) Legalább hány élt kell kitörölni egy 7 csúcsú teljes gráfból ahhoz, hogy az már ne legyen összefüggő? Állításunkat igazoljuk. (5 pont)

8. Az alábbi táblázat hazánk napsütéses óráinak átlagos mennyiségét mutatja órában mérve az egyes évszakokban.

Tavaszi	Nyár	Ősz	Tél
575,2	845,7	403	180,1

a) Határozzuk meg a napsütéses órák mennyiségének átlagát és szórását. (4 pont)

Az ábrán látható napóra egy magyar városban található. A napóra mutatójának hossza 60 cm, északi irányba áll és a vízszintes talapzattal 60° -os szöget zár be. A tavaszi nap-éj egyenlőség idején (2018. március 20-án) a Nap delelési magassága 42° volt. A Nap delelési magasságán a Nap irányába mutató félegyenesnek a vízszintessel bezárt szögét értjük.



b) Milyen hosszú volt ekkor a napóra mutatójának árnyéka a vízszintes alaplapon? (5 pont)

A napóra felületének koszolódását úgy szeretnék csökkenteni, hogy talapzatra helyezik a napórát. A talapzat egy olyan téglatest alakú betontömb, amelynek fedőlapját és oldallapjait 2 cm vastag márványlappal borítják be. A márvánnyal beborított betontömb alaplappja 1 m oldalhosszúságú négyzet, magassága 80 cm. A márványbevonat készítése közben a megvásárolt mennyiség 10%-a hulladék lesz.

c) Mennyibe kerül a betontömb beborításához szükséges márvány, ha 1 m^3 2 cm vastag márványlap ára 540 000 Ft? Válaszunkat tízezer forintra kerekítve adjuk meg. (7 pont)

9. Az alábbi táblázatban a gyorshajítás miatt bekövetkezett halálos közúti balesetek száma látható a Nyugat-Dunántúlon 2010-től 2018-ig a megadott időszakban.

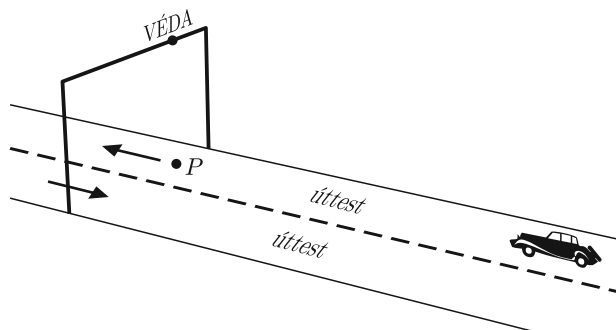
Év	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018
Balesetek száma	9	8	12	7	18	14	15	12	8

a) Határozzuk meg a balesetek számának mediánját és terjedelmét.

(3 pont)

Hazánkban a rendőrség rendszám tábla alapján azonosítja a gyorsautókat. Egy sebességmérő alkalmazásával az útesten szabályosan közlekedő autós éppen szemben van a mérést végző készülékkel, amit VÉDÁ-nak hívnak. A 6,5 m magas állványra szerelt sebességmérő berendezésből 15° -os lehajlási szögben érkezik az útestre a lézernyaláb.

(A lézernyaláb szélességétől az egyszerűség kedvéért most tekintsünk el.)



b) Érzékeli-e a sebességmérő berendezés az ebben a pillanatban a P ponttól 40 m távolságban az útest közepén a VÉDÁ irányába közlekedő személyautót?

(4 pont)

Egy biztosító honlapján a következőket olvashatjuk:

„Az autóbiztosítással rendelkező ügyfeleink 65 százalékát férfiak, 35 százalékát nők teszik ki. Balesetek szempontjából a férfiak a károkozók 69 százalékát teszik ki. Úgy tűnik, a hölgyek biztonságosabban vezetnek, ugyanis a károkozók körében csak 31 százalékos az arányuk.”

c) Vizsgáljuk meg, hogy (a leírtak alapján) az alábbi két esemény közül melyiknek nagyobb a valószínűsége. (9 pont)

I. Ha hölgy vezeti az autót, akkor ő okozza a balesetet.

II. Ha férfi vezeti az autót, akkor ő okozza a balesetet.