

I. rész

1. Lara 3 piros, 4 kék és 3 sárga építőkockával játszik, melyek legfeljebb csak a színükben különböznek egymástól. Az összes építőkockát egymásra téve szeretne egy tornyot építeni.

Hányféle színmintázatú tornyot építhet, ha

a) piros kockát sem alulra, sem felülre nem tesz;

b) legalább két piros elem közvetlenül egymás fölött van?

(12 pont)

Megoldás. a) Összesen 10 kocka van, tehát 10 emeletes lesz a torony, ebből a 3 piros kockát csak 8 helyre teheti, ami $\binom{8}{3} = 56$ lehetőség. A 4 kék kockát a maradék 7 hely bármelyikére helyezheti, amit $\binom{7}{4} = 35$ -féleképpen tehet meg, a sárga kockák helye pedig már egyértelmű. Mivel a piros, illetve kék kockák elhelyezése egymástól függetlenül történik, a színmintázatok száma $56 \cdot 35 = 1960$.

b) A két egymás fölötti elemet ragasszuk képzeletben össze, és tekintsük őket egy elemnek (az elemek sorrendjének megszámlálása így könnyebb; a színmintázatnál majd figyelembe kell venni, hogy ez 2 kockányi piros szín). A 9 kocka lehetséges sorrendjeinek száma így $2 \cdot \frac{9!}{2!4!3!} = 2520$, ahol a 2-es szorzó azért van, mert nem mindegy, hogy az 1 szintes és a 2 szintes piros elem hol helyezkedik el. Azonban azt az esetet, ahol mind a három piros kocka egymás fölött van, így kétszer számoltuk. Ragasszuk össze a három piros kockát, így megkapjuk, hogy ezen esetek száma $\frac{8!}{1!4!3!} = 280$.

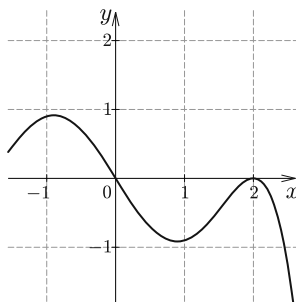
Tehát $2520 - 280 = 2240$ megfelelő színmintázat van ebben az esetben.

2. Az ábra egy f függvény deriváltfüggvényének ($f'(x)$) egy részletét mutatja. Adjuk meg az alábbi állítások esetén, hogy melyik igaz, melyik hamis, illetve melyiknél nem lehet ezt eldönteni. Válaszunkat indokoljuk.

a) A 0 pontban az f függvénynek lokális maximuma van.

b) Ha $0 \leq x \leq 2$, akkor $f(x) \leq 0$.

c) Az f függvény képe az origóra szimmetrikus a $(-1, 1)$ intervallumon.



d) Az f függvénynek az $x = 2$ helyen inflexió pontja van.

(12 pont)

Megoldás. a) Igaz. Az f' értéke a 0 helyen 0, és pozitívból negatívba vált.

b) Nem lehet eldönteni. Az f' függvény menetéből nem lehet pontosan rekonstruálni az f függvényt. (Egy konstans hozzáadásával f értéke az adott intervallumon pozitívvá vagy negatívvá tehető, míg a deriváltfüggvény nem változik.)

c) Hamis. Mivel f' az origóra középpontosan szimmetrikus (ráadásul egy, az adott intervallumnál valamivel szűkebb intervallumon), így az f függvény az y tengelyre szimmetrikus (ezen a szűkebb intervallumon).

d) Igaz. Mivel $f'(2) = 0$ és nem vált előjelet a 2-ben, így inflexió pontja van.

3. Krisztiánnak 80 CD-ből álló gyűjteménye van. A CD-k között 48 olyan van, amin több előadó szerepel (T), 24 olyan van, amin egy előadó vagy együttes számai vannak (E), és 8 hangszeres zenei CD-je (H) is van. Sajnos Krisztián nem túl rendes, és az összes CD egy fiókban hever egymás hegyén-hátán.

Egyik barátja megkéri, hogy vigyen el a partijára 5 CD-t. Mivel – mint mindig – Krisztián nagy rohanásban van, anélkül, hogy a fiókba nézne, kivesz onnan 5 CD-t.

a) Mi a valószínűsége annak, hogy csak hangszerest visz?

b) Mi a valószínűsége, hogy az öt CD között lesz legalább egy (T), viszont nem lesz (H)?

c) Krisztián rápillantott a kezében lévő CD-kre, és látta, hogy a legfelső (H). Mi a valószínűsége, hogy a többi is az?

(13 pont)

Megoldás. a) A jó esetek száma $\binom{8}{5} = 56$, az összes eset száma $\binom{80}{5} = 24\,040\,016$, így a valószínűség $p_a = \frac{56}{24\,040\,016} (\approx 2,33 \cdot 10^{-6})$.

b) 1, 2, 3, 4 vagy 5 (T), és ennek megfelelően 4, 3, 2, 1 vagy 0 (E) lesz a választott lemezek között (és nyilván mindig 0 (H), amit $\binom{8}{0} = 0 = 1$ -féleképp választhatunk ki, de ezt nem szükséges leírni):

$$p_b = \frac{\binom{48}{1}\binom{24}{4} + \binom{48}{2}\binom{24}{3} + \binom{48}{3}\binom{24}{2} + \binom{48}{4}\binom{24}{1} + \binom{48}{5}\binom{24}{0}}{\binom{80}{5}} \approx 0,58.$$

c) Használjuk a feltételes valószínűségekre vonatkozó képletet (itt most számít a sorrend):

$$p_c = \frac{P(\text{első az és a többi is az})}{P(\text{első az})} = \frac{\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{80 \cdot 79 \cdot 78 \cdot 77 \cdot 76}}{\frac{8 \cdot 79 \cdot 78 \cdot 77 \cdot 76}{80 \cdot 79 \cdot 78 \cdot 77 \cdot 76}} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{79 \cdot 78 \cdot 77 \cdot 76} (\approx 2,33 \cdot 10^{-5}).$$

4. Oldjuk meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán:

a) $2^{4x-1} \cdot 4^{2x+3} = 8^x$;

b) $\sqrt{x - \sqrt{x+2}} \leq 2$.

(14 pont)

Megoldás. a) Alakítsuk át mindkét oldalt:

$$\begin{aligned} 2^{4x-1} \cdot 2^{4x+6} &= 2^{3x}, \\ 2^{8x+5} &= 2^{3x}. \end{aligned}$$

Az exponenciális függvény szigorú monotonitása miatt ebből $8x+5=3x$, és így $x=-1$ következik, ami az ekvivalens lépések miatt megoldása az egyenletnek.

b) A bal oldal nemnegatív, így az egyenlőtlenséget négyzetre emelhetjük: $x - \sqrt{x+2} \leq 4$, de $0 \leq x - \sqrt{x+2}$ -nek is teljesülnie kell. Ekkor $x \geq \sqrt{x+2} \geq 0$, amiből $x^2 \geq x+2$, vagyis $x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2) \geq 0$. Ebből pedig $x \geq 2$ vagy $x \leq -1$ következik, de ez utóbbi ellentmond az $x \geq 0$ feltételnek.

A belső gyökjel alatt is nemnegatív szám kell, hogy álljon, vagyis $x \geq -2$.

A kettőt összevetve $x \geq 2$ adódik. Ekkor megoldandó az $x-4 \leq \sqrt{x+2}$ egyenlőtlenség. Ha $2 \leq x < 4$, akkor a bal oldal negatív, a jobb oldal pozitív, tehát ez megfelelő. Ha $x \geq 4$, akkor négyzetre emelve az $x^2 - 8x + 16 \leq x+2$ egyenlőtlenséget kapjuk, amiből $x^2 - 9x + 14 = (x-2)(x-7) \leq 0$, azaz $2 \leq x \leq 7$. Ekkor tehát $4 \leq x \leq 7$.

Az egyenlőtlenség megoldása: $2 \leq x \leq 7$.

II. rész

5. A Schiller Gimnázium diákjainak mindegyike első idegen nyelvként angolt tanul, és legalább egy, legfeljebb két nyelvet választhatnak a francia, spanyol és latin közül. A 10. évfolyam 72 diákjából 40-en két nyelvet is választottak. 48-an tanulnak franciául, 40-en spanyolul és valahányan latinul. 24-en tanulnak franciául és spanyolul is, és 12-en franciául és latinul.

a) Hányan tanulnak összesen latinul; és ebből hányan spanyolul is?

Az évfolyamról egy tanulót véletlenszerűen kiválasztva mi annak a valószínűsége, hogy

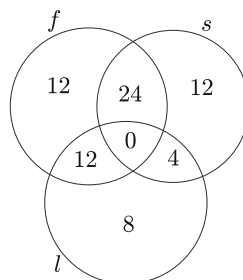
b) franciául és spanyolul,

c) franciául vagy spanyolul,

d) vagy franciául, vagy latinul (de nem mindkét nyelven) tanul?

(16 pont)

Megoldás. Kezdjük el kitölteni a Venn-diagramot. Jelöljük a nyelveket kezdőbetűjükkel. A 40 diák közül, akik 2 plusz nyelvet is választottak, 24-en franciául és spanyolul, 12-en francia és latin nyelven, tehát $40 - 24 - 12 = 4$ tanuló választotta a spanyolt és latint. A 40 spanyolul tanuló közül $24 + 4 = 28$ tanuló választott még egy nyelvet, így $40 - 28 = 12$ diák tanul csak spanyolul (az angol mellett, amire ezután nem térünk ki). A csak franciául tanuló diákok száma $48 - 24 - 12 = 12$. Végül, a csak latinul tanulók száma $72 - (24 + 12 + 4 + 12 + 12) = 8$.



a) Tehát összesen $12 + 4 + 8 = 24$ diák tanul latint, és ebből 4 spanyolt is.

b) $p_{fs} = \frac{24}{72} = \frac{1}{3}$.

c) $p_{f\vee s} = \frac{48+16}{72} = \frac{64}{72} = \frac{8}{9}$.

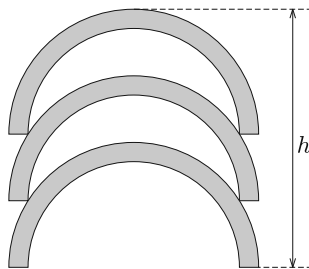
d) $p_{f\bar{\vee} \bar{f}l} = \frac{(12+24)+(8+4)}{72} = \frac{48}{72} = \frac{2}{3}$.

6. Egy parkban néhány, betonból készült, félgömb formájú virágtartót használnak. A félgömbök belső sugara 44 cm, falvastagsága 8 cm, a beton sűrűsége $2,2 \text{ g/cm}^3$.

a) Hány m^3 virágföld fér egy ilyen tartóba?

b) Milyen nehéz egy tartó?

c) A tél beállta előtt mindegyik tartót kiürítik, majd hármat-hármat egymásra helyeznek. Milyen magas egy ilyen rakás?

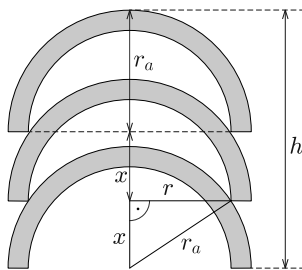


d) Tavasszal újra kihelyezik a tartókat. Előtte fehérre meszelik a tartók külső részét (a peremet is). Egy-egy virágtartónak mekkora területű része lesz így frissen meszelve (cm^2 -ben)? (16 pont)

Megoldás. Használjuk az ábra jelöléseit. A virágtartók belső sugara $r = 44 \text{ cm}$, külső sugara $r_a = 52 \text{ cm}$, két egymásra rakott tartó aljának távolsága pedig x .

a) A tartóba tehető virágföld térfogata:

$$V_{\text{virágföld}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 \approx 0,178 \text{ m}^3.$$



b) A tartó térfogata:

$$V_{\text{tartó}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi (r_a^3 - r^3) \approx 116\,080 \text{ cm}^3.$$

A tartó tömege: $m = \rho \cdot V \approx 255 \text{ kg}$.

c) A Pitagorasz-tételt felírva: $r_a^2 = x^2 + r^2$, amiből $x \approx 27,7 \text{ cm}$, és így a kért magasság: $h = 2x + r_a \approx 107,4 \text{ cm}$.

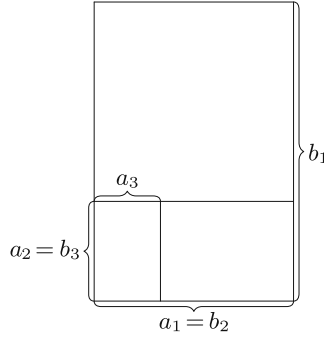
d) A lefestendő felület áll egy r_a sugarú félgömbből, valamint egy r_a és r sugarú kör által meghatározott körgyűrűből:

$$F = \frac{1}{2} \cdot 4\pi r_a^2 + \pi(r_a^2 - r^2) = \pi(3r_a^2 - r^2) \approx 19\,402,48 \text{ cm}^2.$$

7. Egy téglalap oldalai $a_1 = 2 \text{ m}$ és $b_1 = 3 \text{ m}$. Felosztjuk két téglalapra az ábrán látható módon úgy, hogy az egyik hasonló az elsőhöz, oldalai a_2 és $b_2 = a_1$. Ezt a második téglalapot is felosztjuk úgy, hogy a kapott két téglalap közül az egyik hasonló hozzá, és ennek a harmadik téglalagnak az oldalai a_3 és $b_3 = a_2$. Ezt az eljárást folytatjuk.

a) Milyen hosszúak az n -edik téglalap oldalai?

b) Milyen n esetén lesz az n -edik és az $(n+1)$ -edik téglalap területének különbsége 1 cm^2 -nél kisebb?



c) Mekkora az első n téglalap kerületének összege?

(16 pont)

Megoldás. a) $b_1 = 3$ m, $a_1 = 2$ m $= \frac{2}{3}b_1$;

$$b_2 = a_1 = \frac{2}{3}b_1; a_2 = \frac{2}{3}b_2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot b_1;$$

$$b_n = a_{n-1} = \frac{2}{3}b_{n-1} = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \cdot b_1; a_n = \frac{2}{3}b_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot b_1.$$

b) Írjuk fel az n . és az $(n+1)$. téglalap területét:

$$T_n = a_n \cdot b_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot b_1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \cdot b_1 = \left(\frac{2}{3}\right)^{2n-1} \cdot b_1^2,$$

$$T_{n+1} = a_{n+1} \cdot b_{n+1} = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \cdot b_1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot b_1 = \left(\frac{2}{3}\right)^{2n+1} \cdot b_1^2.$$

A kettő különbsége:

$$T_n - T_{n+1} = \left(\frac{2}{3}\right)^{2n-1} \cdot \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2\right) \cdot b_1^2.$$

Mivel $b_1 = 300$ cm, azért ez pontosan akkor kisebb 1 cm²-nél, ha

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{2n-1} \cdot \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2\right) < \frac{1}{90\,000}.$$

Ekvivalens átalakításokat végezve ebből:

$$\begin{aligned} \left(\frac{2}{3}\right)^{2n-1} &< \frac{1}{50\,000}, \\ (2n-1) \cdot \lg \frac{2}{3} &< \lg \frac{1}{50\,000}, \\ 2n-1 &> \frac{\lg \frac{1}{50\,000}}{\lg \frac{2}{3}} = \frac{-\lg 50\,000}{\lg 2 - \lg 3}, \\ n &> \frac{1}{2} - \frac{\lg 50\,000}{2(\lg 2 - \lg 3)} \approx 13,8. \end{aligned}$$

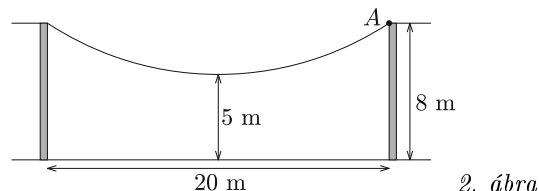
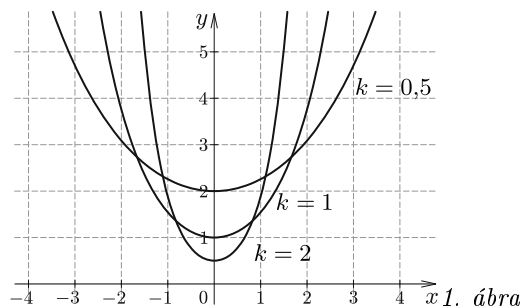
Tehát $n \geq 14$ esetén lesz az n -edik és az $(n+1)$ -edik téglalap területének különbsége 1 cm²-nél kisebb.

c) Az első n téglalap kerületének összege:

$$\begin{aligned} &2 \cdot \left(\left(\left(\frac{2}{3}\right)^1 \cdot 3 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot 3 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot 3 + \dots + \left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot 3 \right) + \right. \\ &\quad \left. + \left(3 + \frac{2}{3} \cdot 3 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot 3 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot 3 + \dots + \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \cdot 3 \right) \right) = \\ &= 2 \cdot \left(3 \cdot 2 \cdot \left(1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \dots + \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \right) + 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n - 3 \right) = \\ &= 12 \cdot \left(\frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 - \frac{2}{3}} \right) + 6 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n - 6 = 30 - 30 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n. \end{aligned}$$

8. Egy kalandpark pályáján két fa között egy függőhíd található. A felfüggesztett híd alakjának általános képlete $f(x) = a \cdot \frac{e^{kx} + e^{-kx}}{2k}$, ahol a és k valós paraméterek. Az 1. ábrán az $a = 1$ és $k = 0,5$, $k = 1$, illetve $k = 2$ értékekhez tartozó láncgörbék láthatók.¹

¹A 8. feladat szövegéből eredetileg kimaradt, hogy a görbék az $a = 1$ értékhez tartoznak.



a) A 2. ábrán a híd vázlatos oldalnézetét látjuk. Határozzuk meg a híd görbéjéhez tartozó két paraméter értékét 3 tizedesjegyre kerekítve (a talajszintet tekintjük az x -tengelynek.)

b) Határozzuk meg, hogy az A pontban a híd milyen szöget zár be a vízszintessel.

c) Reklámfelület szeretnének felszerelni a híd egyik oldalára úgy, hogy a felület a talajszint, a híd és a két fa zárja közre. Mekkora felület keletkezik így?

(16 pont)

Megoldás. a) $f(0) = 5$, vagyis $5 = a \cdot \frac{e^0 + e^0}{2k}$, amiből $5k = a$. Tudjuk még, hogy

$$8 = f(10) = a \cdot \frac{e^{10k} + e^{-10k}}{2k} = 5k \cdot \frac{e^{10k} + e^{-10k}}{2k},$$

amiből $3,2 = e^{10k} + e^{-10k}$. Legyen $u = e^{10k}$, ekkor u -val beszorozva kapjuk, hogy $u^2 - 3,2u + 1 = 0$, amiből $u_{1,2} = \frac{3,2 \pm \sqrt{10,24 - 4}}{2} \approx \frac{3,2 \pm 2,5}{2}$, azaz $u_1 = 2,85$ és $u_2 = 0,35$ (a két szám egymás reciproka). Ebből $k_1 = 0,105$, $k_2 = -0,105$ és a megfelelő a értékek $a_1 = 0,525$ és $a_2 = -0,525$. (A láncgörbénél a pozitív értékeket szokás használni.)

b) $f(x) = 2,5(e^{0,105x} + e^{-0,105x})$, amiből $f'(x) = 2,5 \cdot 0,105(e^{0,105x} - e^{-0,105x})$, és így $f'(10) \approx 0,658$. A keresett szöget α -val jelölve $\tan \alpha = f'(10) = 0,658$, amiből $\alpha \approx 33,3^\circ$.

Tehát az A pontban a híd körülbelül 33° -os szöget zár be a vízszintessel.

c)

$$\begin{aligned} T &= 2 \cdot \int_0^{10} 2,5(e^{0,105x} + e^{-0,105x}) dx = \\ &= 2 \cdot \left[2,5 \left(\frac{1}{0,105} e^{0,105x} - \frac{1}{0,105} e^{-0,105x} \right) \right]_0^{10} = \\ &= 5 \left(\frac{1}{0,105} e^{1,05} - \frac{1}{0,105} e^{-1,05} \right) - 5 \left(\frac{1}{0,105} e^0 - \frac{1}{0,105} e^0 \right) \approx 119,41 \text{ m}^2. \end{aligned}$$

9. a) Hány osztója van a $2018 \cdot 2019$, illetve a 2018^{2019} számnak?

b) Mennyi az egyik, illetve a másik szám osztóinak az összege?

c) Bizonyítsuk be, hogy 2018^{2019} legalább $3 \cdot 2019$ számjegyből áll.

d) Melyik nagyobb: 2018^{2019} vagy 2019^{2018} ?

(16 pont)

Megoldás. a) $2018 = 2 \cdot 1009$, $2019 = 3 \cdot 673$, így az osztók száma:

$$\begin{aligned} d(2018 \cdot 2019) &= d(2 \cdot 3 \cdot 673 \cdot 1009) = 2^4 = 16, \\ d(2018^{2019}) &= d(2^{2019} \cdot 1009^{2019}) = 2020^2 = 4080400. \end{aligned}$$

b) $2018 \cdot 2019$ osztói:

$$\begin{aligned} &1, 2, 1009, 2018; 3 \cdot 1 = 3; 3 \cdot 2 = 6; 3 \cdot 1009 = 3027; 3 \cdot 2018 = 6054; \\ &673 \cdot 1 = 673; 673 \cdot 2 = 1346; 673 \cdot 1009 = 679057; 673 \cdot 2018 = 1358114; \\ &2019 \cdot 1 = 2019; 2019 \cdot 2 = 4038; 2019 \cdot 1009 = 2037171; 2019 \cdot 2018 = 4074342. \end{aligned}$$

Összegük 8 168 880. (Ezt az összeget így is kiszámolhatjuk:

$$\frac{2^2 - 1}{2 - 1} \cdot \frac{1009^2 - 1}{1009 - 1} \cdot \frac{3^2 - 1}{3 - 1} \cdot \frac{673^2 - 1}{673 - 1} = 3 \cdot 1010 \cdot 4 \cdot 674 = 8\,168\,880.)$$

2018^{2019} osztóit az első módszerrel nehéz lenne összeszámolni. Vegyük észre, hogy minden osztó $2^k \cdot 1009^l$ alakú, ahol k és l 0 és 2019 közötti tetszőleges egész szám lehet. Tehát az osztók összegét felírhatjuk

$$\sum_{k=0}^{2019} 2^k \cdot \sum_{l=0}^{2019} 1009^l$$

alakban, hiszen minden osztó két szám szorzata az alábbi táblázatban:

	1	2	4	8	...	2^{2019}
1						
1009						
1009^2						
.						
.						
.						
1009^{2019}						

Az összes lehetséges szorzat összege így

$$\frac{1009^{2020} - 1}{1009 - 1} \cdot \frac{2^{2020} - 1}{2 - 1} = \frac{1009^{2020} - 1}{1008} \cdot (2^{2020} - 1).$$

c)

$$\begin{aligned} c) \quad 2018^{2019} &> (2 \cdot 10^3)^{2019} = 2^{2019} \cdot 10^{3 \cdot 2019} = (2^{10})^{201} \cdot 2^9 \cdot 10^{6057} > \\ &> (10^3)^{201} \cdot 2^9 \cdot 10^{6057} = 10^{603} \cdot 2^9 \cdot 10^{6057} = 512 \cdot 10^{6660} > \\ &> 5 \cdot 10^2 \cdot 10^{6660} = 5 \cdot 10^{6662}, \end{aligned}$$

ami legalább $6663 > 6057 = 3 \cdot 2019$ számjegy.

d)

$$\begin{aligned} d) \quad 2018^{2019} &? 2019^{2018}, \\ 2018 &? \left(\frac{2019}{2018}\right)^{2018} = 2,7176 \dots \end{aligned}$$

Tehát 2018^{2019} a nagyobb.