

I. rész

1. Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket:

a) $\frac{2x}{x-1} + \frac{3}{x+1} = \frac{6}{1-x^2},$ (4 pont)

b) $\cos(2x) + 5 \sin x = 3,$ (5 pont)

c) $|x-2| + x = 4\sqrt{x} - 2.$ (5 pont)

2. Egy háromszögben az egyik oldal kétszer akkora, mint egy másik oldal; az előbbivel szemközti szög 60° -kal nagyobb az utóbbival szemközti szögnél. A háromszög területe $2\sqrt{3}$ területegység. Mekkora a háromszög oldalai és szögei? (12 pont)

3. a) Igaz-e az A, B kijelentések tetszőleges logikai értékénél, hogy

$$((\neg A \rightarrow \neg B) \wedge A) \rightarrow B = \text{igaz?}$$

($\neg A$ = nem A .) (5 pont)

b) Igaz-e, ha $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = 0$, akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) + \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n) = 0$? Válaszunkat indokoljuk. (3 pont)

c) Hány pontja lehet annak az egyszerű, összefüggő gráfnak, amelynek 8 éle van? (4 pont)

4. a) Hány olyan kétjegyű szám van, amelyben a számjegyek különbségének abszolút értéke legfeljebb 3? (8 pont)

b) Ha ezek közül véletlenszerűen kiválasztunk kettő különböző számot, mennyi a valószínűsége annak, hogy az egyik páros, a másik páratlan lesz? (5 pont)

II. rész

5. Egy téglalap oldalainak mérőszáma egész szám. Ezt a téglalapot oldalalaival párhuzamos egyenesekkel egység-négyzetekre daraboltuk, majd a széleken levőket fehérre, a többi feketére festettük.

a) Mekkora a téglalap oldalai, ha kétszer annyi fekete négyzet lett, mint amennyi fehér? (9 pont)

b) Az a) részben kapott téglalapokból kiválasztottuk azt, amelynek oldalméretei között legkisebb a különbség, majd egy 8 egység sugarú piros kör lap közepére erősítettük. Az így kapott eszközt céltáblának használjuk, ahol a telitalálatot az jelenti, ha fehér mezőbe csapódik a lövedék. Feltesszük, hogy minden lövés eltalálja a céltáblát, és annak minden pontját egyenlő valószínűséggel. Mekkora a valószínűsége, hogy Vilmos négy lövésből legalább kétszer telitalálatot ér el? Az eredményt százalékban egészre kerekítve fejezzük ki. (7 pont)

6. a) Az $f(x) = \frac{x^2}{4}$ függvény grafikonját tükrözzük az $A(2; 5)$ pontra. Hol metszi az így kapott görbe az $f(x)$ grafikonját? (5 pont)

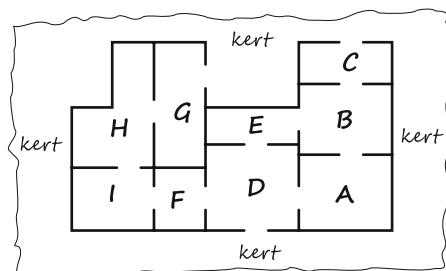
b) Húzzunk érintőt a $P(3; -4)$ pontból $f(x)$ grafikonjához. Írjuk fel az érintők egyenletét. (6 pont)

c) Mekkora a területe annak a síkidomnak, melyet az $f(x)$ függvény grafikonja és a $P(3; -4)$ ponton átmenő érintők zárnak közre? (5 pont)

7. a) Mutassuk meg, hogy minden n természetes számra igaz, hogy $3 \mid n^3 + 8n$. (6 pont)

b) Oldjuk meg a $p + q^n = 2019$ egyenletet, ahol p, q pozitív prím, n pozitív egész szám. Használjuk a függvénytáblázatot. (6 pont)

c) Nagy úr éppen most kísérte végig vendégeit a birtokán, amelynek során minden ajtón pontosan egyszer mentek át. A bemutató végén a nappaliban pezsgővel koccintottak a találkozásra. Melyik helyiség a nappali? A helyiségek betűjelének felsorolásával adjunk meg egy lehetséges bejárési sorrendet. (4 pont)



Nagy úr házána alaprajza

8. Egy kozmetikai cég saját termékét három változatban forgalmazza a hatóanyag töménységétől, a kiszerezés mennyiségétől és a csomagolástól függően. Az A jelű termék 150 g-os, 10% töménységű; a B jelű 100 g-os, 20% töménységű; a C jelű 50 g-os, 30% töménységű. A hatóanyag és az oldószer a termék árában a mennyiségével egyenes arányban jelenik meg; az A és B jelű termék csomagolása kétszer annyiba kerül, mint a C jelű terméké. Az üzletben az A 2275 Ft-ba, a B 2500 Ft-ba, a C pedig 1725 Ft-ba kerül dobozonként.

a) Mennyi a hatóanyag és az oldószer grammonkénti ára? (7 pont)

Anna egyik nap észrevette, hogy az üzlet egyik polcán az A , B , C jelű termékekből annyi van, hogy számuk egy növekvő mértani sorozat három szomszédos elemével egyenlő. A számok átlaga 14, szórása $2\sqrt{14}$.

b) Hány termék volt a polcon az egyes fajtákból? (9 pont)

9. A 2 egység élű $ABCDEFGH$ csúcsú kocka $ABCD$ alaplappjának középpontja P ; $DCGH$ oldallappjának középpontja Q ; $AEHD$ előlappjának középpontja R ; a BF él felezőpontja S . (A -t E -vel, B -t F -fel, C -t G -vel, D -t H -val köti össze él.)

a) Mekkora az A , P , Q , R , S csúcsú poliéder térfogata? (8 pont)

b) Mekkora a poliéderbe írt gömb sugara? (8 pont)