

Bemutatjuk Euler arányösszeg-tételének történetét, adunk rá egy új bizonyítást, és egy érdekes egyenlőtlenséggé alakítjuk Euler arányösszeg-formuláját.

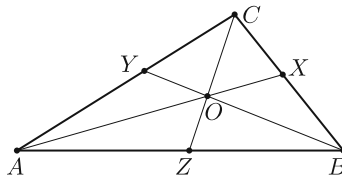
1. Bevezetés

Leonhard Euler (1707–1783), korának legnagyobb matematikusa, a geometriát is számos azóta híressé vált tétellel gazdagította. Ebben a dolgozatban¹ a Magyarországon kevésbé ismert arányösszeg-tétellel foglalkozunk, amelynek nemzetközi irodalma sem túlságosan bőséges, habár időről időre feltűnnek újabb bizonyításokat, illetve lehetséges általánosításokat tárgyaló cikkek (lásd [4, 5, 6, 9, 10]).

1. tétel (Euler arányösszeg-tétele [2]). *Az euklideszi sík minden ABC háromszögének bármely O belső pontjára*

$$(1) \quad \frac{AO}{OX} + \frac{BO}{OY} + \frac{CO}{OZ} + 2 = \frac{AO}{OX} \cdot \frac{BO}{OY} \cdot \frac{CO}{OZ},$$

ahol $X = AO \cap BC$, $Y = BO \cap CA$, $Z = CO \cap AB$.



Habár Euler már 1780. május 1-jén benyújtotta a kiadónak az arányösszeg-tételt tartalmazó tanulmányát [2], az csak 1783-ban bekövetkezett halála után 22 évvel jelent meg. Sok munkája jutott erre a sorsra, aminek legfőbb oka az volt, hogy valósággal ontotta magából a cikkeket (élete során több, mint 800-at írt a 28 nagyobb mű mellett), így az általa preferált Berliin, illetve Szentpétervári Akadémiák folyóiratainál kiadatlan művei igencsak feltorlódtak.

A kortársak azonban ismerték Euler arányösszeg-tételét, amit jól mutat, hogy Anders Johan Lexell (1740–1783), aki az Euler-család jó barátja volt, és haláláig ugyanannak a Szentpétervári Akadémiának volt a tagja, már 1784-ben publikálta a tétel gömbháromszögekre érvényes változatát [3].

Jelen szerzőknek is egy általánosabb problémával, a projektív-metrikus terek karakterizációjával [8] összefüggésben került látóterébe az arányösszeg-tétel [7].

Még az arányösszeg-tételnél is kevésbé ismert, pedig már Euler [2] dolgozatában is szerepelt, hogy az ABC háromszög megszerkeszthető az (1) formulában szereplő hosszak ismeretében.

2. tétel (Szerkeszthetőség). *Ha adottak egy ismeretlen ABC háromszög valamely O pontjára illeszkedő AX , BY és CZ szakaszok hosszai, valamint azok O pont általi felosztásának arányai, akkor az ABC háromszög megszerkeszthető.*

Ebben a dolgozatban nemcsak a fenti tételeket igazoljuk, hanem a 3. tételben pontosan megadjuk annak feltételeit is, hogy három olyan szakaszt, amelyek belsejében adott egy-egy pont, mikor lehet ezen belső pontjaikban úgy összeilleszteni, hogy a valamely három kiválasztott végpontjuk által meghatározott háromszögnek a kiválasztott végponttal szemben lévő oldalai tartalmazzák a szakaszok nem kiválasztott végpontjait².

Végül, bár bemutatjuk a közvetlen általánosítás lehetőségét is, inkább egy az (1) egyenlőségből született egyenlőtlenséget bizonyítunk, mely éppenséggel pontosan akkor válik egyenlőséggé, ha az AX , BY és CZ szakaszok egy ponton mennek át. A 4. tétel határozottan emlékeztet Routh tételére ([1, 13.55], [11]).

2. Az arányösszeg-tétel és megfordításának bizonyítása

Az 1. tétel bizonyítása. Áttekinthetőbbé válik Euler (1) formulája, ha bevezetjük az $a = \frac{AO}{OX}$, $b = \frac{BO}{OY}$ és $c = \frac{CO}{OZ}$ jelöléseket:

$$(2) \quad a + b + c + 2 = abc.$$

¹Ez a kutatás az NKFIH K-116451 és KH_18 129630 projektjei támogatásával készült.

¹Ugyanez angol nyelven is elérhető, lásd [7].

²A [9] tanulmány igazolta, hogy amennyiben csak az (1) egyenletben szereplő arányok betartása fontos, akkor (1) elegendő: minden további feltétel nélkül van olyan háromszög, amelyben éppen az (1) egyenletben szereplő arányok lépnek fel. Sőt, a szerző megjegyzi, hogy egy ilyen háromszög minden affin képe is megteszi.

Mindkét oldalhoz hozzáadva az $1 + a + b + c + ab + bc + ca$ kifejezést, a jobb oldal újra szorzatalakba írható, és a bal oldal is szorzatok összegévé válik:

$$(1+b)(1+c) + (1+a)(1+c) + (1+a)(1+b) = (1+a)(1+b)(1+c).$$

Az a , b és c értéke nyilván nem -1 , ezért a jobb oldallal osztva az ekvivalens

$$(3) \quad \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} = 1$$

egyenlőséghez jutunk, vagyis (1) ekvivalens az

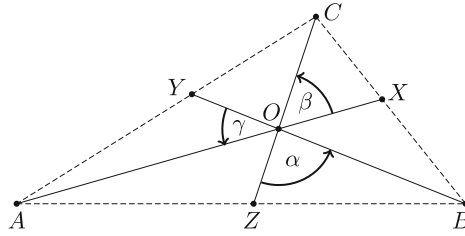
$$(4) \quad \frac{OX}{AX} + \frac{OY}{BY} + \frac{OZ}{CZ} = 1$$

egyenlőséggel. Ez azonban közvetlenül adódik az

$$\frac{OX}{AX} = \frac{t(OBC)}{t(ABC)}, \quad \frac{OY}{BY} = \frac{t(OCA)}{t(ABC)}, \quad \frac{OZ}{CZ} = \frac{t(OAB)}{t(ABC)}$$

egyenlőségekből. □

A 2. tétel bizonyítása. Annak érdekében, hogy elkerüljük az áttekinthetetlenül összetett formulákat, most is alkalmazzuk az $a = \frac{AO}{OX}$, $b = \frac{BO}{OY}$ és $c = \frac{CO}{OZ}$ jelöléseket, melyekre a feltétel szerint (2), vagy ami ugyanaz, (3) teljesül. Bevezetjük még az $\alpha = \angle ZOB$, $\beta = \angle XOC$ és $\gamma = \angle YOA$ szögeket, amelyekre nyilván $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ érvényes.



Feladatunk tehát az α , β és $\gamma = \pi - \alpha - \beta$ értékek megtalálása.

Az X pont akkor és csak akkor esik a BC szakaszra, ha

$$BO \cdot OC \sin \alpha = t(BOC) = BO \cdot OX \sin \gamma + CO \cdot OX \sin \beta,$$

vagyis

$$\frac{AO}{OX} \cdot \frac{\sin \alpha}{OA} = \frac{\sin \alpha}{OX} = \frac{\sin \gamma}{OC} + \frac{\sin \beta}{BO}.$$

A csúcsok ciklikus permutációjával ugyanígy látjuk, hogy $Y \in CA$ és $Z \in AB$ akkor és csak akkor igaz, ha rendre

$$\begin{aligned} \frac{BO}{OY} \cdot \frac{\sin \beta}{OB} &= \frac{\sin \alpha}{OA} + \frac{\sin \gamma}{CO}, \\ \frac{CO}{OZ} \cdot \frac{\sin \gamma}{OC} &= \frac{\sin \beta}{OB} + \frac{\sin \alpha}{AO}. \end{aligned}$$

Az $x = \frac{\sin \alpha}{AO}$, $y = \frac{\sin \beta}{OB}$ és $z = \frac{\sin \gamma}{OC}$ bevezetésével azt kapjuk, hogy ezek teljesítik az

$$(5) \quad \begin{aligned} ax - y - z &= 0, \\ -x + by - z &= 0, \\ -x - y + cz &= 0 \end{aligned}$$

homogén lineáris egyenletrendszer. Az (5) egyenleteinek különbségéből rögtön adódik, hogy a megoldásokra $(1+a)x = (1+b)y = (1+c)z$ teljesül, vagyis minden megoldás $(\frac{\lambda}{1+a}, \frac{\lambda}{1+b}, \frac{\lambda}{1+c})$ alakú, ahol $\lambda \in \mathbb{R}$. Eszerint

$$(6) \quad \lambda \frac{AO}{1+a} = \sin \alpha, \quad \lambda \frac{BO}{1+b} = \sin \beta \quad \text{és} \quad \lambda \frac{CO}{1+c} = \sin \gamma.$$

Ebből

$$\frac{OB}{1+b} \sin \alpha = \frac{OA}{1+a} \sin \beta,$$

és

$$\begin{aligned}\frac{OC}{1+c} &= \frac{\sin \gamma}{\lambda} = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha}{\lambda} = \frac{\sin \alpha}{\lambda} \cos \beta + \cos \alpha \frac{\sin \beta}{\lambda} = \\ &= \frac{OA}{1+a} \cos \beta + \frac{OB}{1+b} \cos \alpha\end{aligned}$$

is következik. Utóbbi egyenlőség mindkét oldalából kivonva az $\frac{OB}{1+b} \cos \alpha$ kifejezést, majd az eredményt négyzetre emelve és hozzáadva az első egyenlethez, azt kapjuk, hogy

$$\frac{OB^2}{(1+b)^2} \sin^2 \alpha + \left(\frac{OC}{1+c} - \frac{OB}{1+b} \cos \alpha \right)^2 = \frac{OA^2}{(1+a)^2}.$$

Ebből a bal oldalon a különbség négyzetre emelését elvégezve

$$(7) \quad \frac{OB^2}{(1+b)^2} - 2 \cdot \frac{OC}{1+c} \cdot \frac{OB}{1+b} \cos \alpha + \frac{OC^2}{(1+c)^2} = \frac{OA^2}{(1+a)^2}$$

adódik. Ez a koszinusz-tétel értelmében azt jelenti, hogy van egy olyan PQR háromszög, amelynek a csúcsokkal szembeni oldalhosszaira rendre $p = \frac{OA}{1+a}$, $q = \frac{OB}{1+b}$ és $r = \frac{OC}{1+c}$ érvényes, és szögei a csúcsoknál rendre α , β és $\gamma = \pi - \alpha - \beta$.

Az eredeti háromszöget tehát úgy tudjuk megszerkeszteni, hogy a $p = \frac{AO \cdot OX}{AX}$, $q = \frac{BO \cdot OY}{BY}$ és $r = \frac{CO \cdot OZ}{CZ}$ hosszakat kiszámítjuk, ezekből megszerkesztjük a PQR háromszöget, ennek szögei megadják az α , β és $\gamma = \pi - \alpha - \beta$ szögeket, amelyek alapján az AX , BY és CZ szakaszok egymáshoz képest beállíthatók. $\square$

Az 1. tétel és a 2. tétel bizonyítása alapján világos, hogy az alábbi tétel feltételeit nem lehet könnyíteni.

3. tétel (Az arányösszeg-tétel megfordítása). *Ha adott közös O pontra illeszkedő AX , BY és CZ szakaszokra érvényes Euler (1) formulája, valamint a $p = \frac{AO \cdot OX}{AX}$, $q = \frac{BO \cdot OY}{BY}$ és $r = \frac{CO \cdot OZ}{CZ}$ számok mindegyike kisebb a másik kettő összegénél, akkor az AX , BY és CZ szakaszokat el lehet forgatni O körül úgy, hogy az X , Y , Z pontok rendre az ABC háromszög megfelelő oldalaira essenek.*

Bizonyítás. Az egyszerűség kedvéért legyen $a = \frac{AO}{OX}$, $b = \frac{BO}{OY}$ és $c = \frac{CO}{OZ}$. A feltétel szerint

$$(8) \quad \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} = 1.$$

Szerkesszünk egy olyan PQR háromszöget, mely oldalainak hossza (a szokásos módon jelölve) p , q és r . A csúcsoknál lévő szögek legyenek rendre α , β és $\gamma = \pi - \alpha - \beta$.

Forgassuk el az AX , BY és CZ szakaszokat úgy, hogy $ZOB \triangleleft$ legyen α , $XOC \triangleleft$ legyen β és $YOA \triangleleft$ legyen γ . Eszerint

$$(9) \quad \begin{aligned}q^2 - 2rq \cos \alpha + r^2 &= p^2, \\ p^2 - 2rp \cos \beta + r^2 &= q^2, \\ p^2 - 2qp \cos \gamma + q^2 &= r^2.\end{aligned}$$

Most igazoljuk, hogy a kialakult ABC háromszög csúcsokkal szemközti oldalai rendre tartalmazzák az X , Y és Z pontokat.

Legyen $\hat{X} = AX \cap BC$, $\hat{Y} = BY \cap CA$ és $\hat{Z} = CZ \cap AB$, továbbá $\hat{a} = \frac{AO}{O\hat{X}}$, $\hat{b} = \frac{BO}{O\hat{Y}}$ és $\hat{c} = \frac{CO}{O\hat{Z}}$. Az ABC háromszögre is érvényes (1), így

$$(10) \quad \frac{1}{1+\hat{a}} + \frac{1}{1+\hat{b}} + \frac{1}{1+\hat{c}} = 1$$

adódik. Bevezetve a $\hat{p} = \frac{AO \cdot O\hat{X}}{A\hat{X}}$, $\hat{q} = \frac{BO \cdot O\hat{Y}}{B\hat{Y}}$ és $\hat{r} = \frac{CO \cdot O\hat{Z}}{C\hat{Z}}$ jelöléseket, (7) és a szerkesztés menete alapján

$$(11) \quad \begin{aligned}\hat{q}^2 - 2\hat{r}\hat{q} \cos \alpha + \hat{r}^2 &= \hat{p}^2, \\ \hat{p}^2 - 2\hat{r}\hat{p} \cos \beta + \hat{r}^2 &= \hat{q}^2, \\ \hat{p}^2 - 2\hat{q}\hat{p} \cos \gamma + \hat{q}^2 &= \hat{r}^2.\end{aligned}$$

Az (9) egyenleteket összevetve az (11) egyenletekkel, mivel mindkét egyenlethármas azonos szögű, tehát hasonló háromszögekre vonatkozik, adódik, hogy $\hat{p} = \lambda p$, $\hat{q} = \lambda q$ és $\hat{r} = \lambda r$ valamely $\lambda > 0$ számra. Tekintve a p , q , r és $\hat{p}$, $\hat{q}$, $\hat{r}$ definícióit, ebből $\frac{1}{1+\hat{a}} = \frac{\lambda}{1+a}$, $\frac{1}{1+\hat{b}} = \frac{\lambda}{1+b}$, és $\frac{1}{1+\hat{c}} = \frac{\lambda}{1+c}$ adódik, amiből (8) és (10) összevetésével $\lambda = 1$ következik. Eszerint $\hat{a} = a$, $\hat{b} = b$, és $\hat{c} = c$, vagyis $\hat{X} = X$, $\hat{Y} = Y$, és $\hat{Z} = Z$.
Ezzel a tételt bebizonyítottuk. □

3. Általánosítás helyett egy egyenlőtlenség

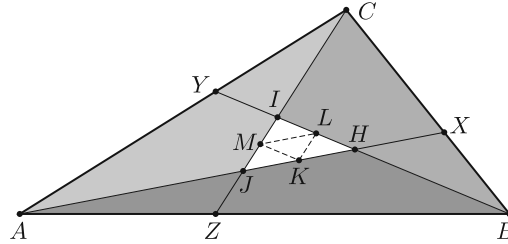
Belátható, hogy Euler arányösszeg-tétele igaz marad akkor is, ha a háromszög csúcsaiból kiinduló egyenesek metszéspontjáról csak annyit teszünk fel, hogy az nem esik a háromszög egyik oldalegyenesére se. Sőt, ezen általánosabb eset megfordítása is érvényben marad ha az X , Y , Z pontoktól csak azt várjuk el, hogy a megfelelő oldalegyenesekre essenek. Ennek bizonyítását itt nem végezzük el, helyette egy Routh tételére ([1, 13.55], [11]) emlékeztető egyenlőtlenséget mutatunk.

Az arányösszeg-formulát tekintsük most az ekvivalens (4) alakjában. Ez a formula a három szakasz egy ponton áthaladása esetén érvényes. Ha a szakaszok páronként különböző H , I , J pontokban metszik egymást, akkor is képezhetünk minden szakaszon arányt, ha a két metszéspont által meghatározott szakasz felezőpontját tekintjük új osztópontnak.

4. tétel. *Legyenek X , Y , Z az ABC háromszög rendre A , B , C csúccsal szemközti oldalainak pontjai, legyenek továbbá őket a szemközti csúcsokkal összekötő szakaszok metszéspontjai $H = AX \cap BY$, $I = BY \cap CZ$ és $J = CZ \cap AX$. Végül legyenek ez utóbbiak által meghatározott HIJ háromszög oldalfelező pontjai $K = (J + H)/2$, $L = (H + I)/2$ és $M = (I + J)/2$. Ekkor*

$$(12) \quad \frac{KX}{AX} + \frac{LY}{BY} + \frac{MZ}{CZ} \geq 1,$$

ahol egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $K = L = M$.



Bizonyítás. Rendre azonos alapú háromszögek területének arányait írhatjuk fel a következőképpen:

$$\begin{aligned} \frac{t(HBC)}{t(ABC)} &= \frac{HX}{AX}, & \frac{t(JBC)}{t(ABC)} &= \frac{JX}{AX}, & \frac{t(ICA)}{t(ABC)} &= \frac{IY}{BX}, \\ \frac{t(HCA)}{t(ABC)} &= \frac{HY}{BX}, & \frac{t(JAB)}{t(ABC)} &= \frac{JZ}{CX}, & \frac{t(IAB)}{t(ABC)} &= \frac{IZ}{CX}. \end{aligned}$$

Ezeket a 12 bal oldalának kétszeresébe helyettesítve kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} & \frac{HX + JX}{AX} + \frac{IY + HY}{BY} + \frac{JZ + IZ}{CZ} = \\ &= \frac{t(HBC)}{t(ABC)} + \frac{t(JBC)}{t(ABC)} + \frac{t(ICA)}{t(ABC)} + \frac{t(HCA)}{t(ABC)} + \frac{t(JAB)}{t(ABC)} + \frac{t(IAB)}{t(ABC)} = \\ &= \frac{t(HBC)}{t(ABC)} + \frac{t(HCA)}{t(ABC)} + \frac{t(ICA)}{t(ABC)} + \frac{t(IAB)}{t(ABC)} + \frac{t(JBC)}{t(ABC)} + \frac{t(JAB)}{t(ABC)} = \\ &= 1 - \frac{t(HAB)}{t(ABC)} + 1 - \frac{t(IBC)}{t(ABC)} + 1 - \frac{t(JAC)}{t(ABC)} = 3 - \frac{t(ABC) - t(HIJ)}{t(ABC)} = \\ &= 2 + \frac{t(HIJ)}{t(ABC)}. \end{aligned}$$

Ezzel a tételünket bebizonyítottuk. □

Hivatkozások

- [1] H. S. M. Coxeter, *A geometriák alapjai*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1973.
- [2] L. Euler, Geometrica et sphaerica quaedam, *Memoires de l'Academie des Sciences de Saint-Petersbourg*, **5** (1815), 96–114; Opera Omnia Series 1, vol. XXVI, 344–358;
eredeti: <http://eulerarchive.maa.org/docs/originals/E749.pdf>;
angol fordítás: <http://eulerarchive.maa.org/Estudies/E749t.pdf>.
- [3] A. J. Lexell, Solutio problematis geometrici ex doctrina sphaericorum, *Acta academiae scientiarum imperialis Petropolitinae*, **5**:1 (1784), 112–126;
<http://www.17centurymaths.com/contents/euler/lexellone.pdf>.
- [4] A. Papadopoulos and W. Su, On hyperbolic analogues of some classical theorems in spherical geometry, *arXiv* (2015), <http://arxiv.org/abs/1409.4742>.
- [5] B. Grünbaum and M. S. Klamkin, Euler's Ratio-Sum Theorem and Generalizations, *Mathematics Magazine*, **79**:2 (Apr) (2006), 122–130;
<http://www.jstor.org/stable/27642919>.
- [6] B. Grünbaum, Cyclic ratio sums and products, *Cruz Mathematicorum*, **24**:1 (1998), 20–25; <https://cms.math.ca/cruz/v24/n1/25.pdf>.
- [7] Á. Kurusa and J. Kozma, Euler's ratio-sum theorem revisited, *Forum Geom.*, **19** (2019);
<http://forumgeom.fau.edu/FG2019volume19/FG2019index.html>.
- [8] Á. Kurusa and J. Kozma, Euler's ratio-sum formula in projective-metric spaces, *Beiträge zur Algebra und Geometrie*, (2018);
<https://doi.org/10.1007/s13366-018-0422-6>.
- [9] G. C. Shephard, Euler's Triangle Theorem, *Cruz Mathematicorum*, **25**:3 (1999), 148–153; <https://cms.math.ca/cruz/v25/n3/153.pdf>.
- [10] C. E. Sandifer, 19th century Triangle Geometry (May 2006), *How Euler did it*, Math. Ass. Amer., 2007, 19–27;
<http://eulerarchive.maa.org/hedi/HEDI-2006-05.pdf>.
- [11] https://en.wikipedia.org/wiki/Routh's_theorem; Accessed 2019. március 8.