

I. rész

1. Lara 3 piros, 4 kék és 3 sárga építőköccével játszik, melyek legfeljebb csak a színükben különböznek egymástól. Az összes építőköccét egymásra téve szeretne egy tornyot építeni.

Hányféle színmintázatú tornyot építhet, ha

a) piros köccét sem alulra, sem felülre nem tesz;

b) legalább két piros elem közvetlenül egymás fölött van?

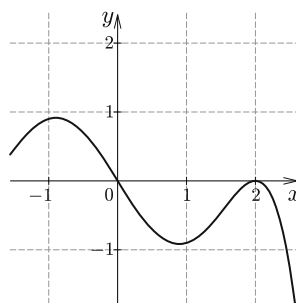
(12 pont)

2. Az ábra egy f függvény deriváltfüggvényének ($f'(x)$) egy részletét mutatja. Adjuk meg az alábbi állítások esetén, hogy melyik igaz, melyik hamis, illetve melyiknél nem lehet ezt eldönteni. Válaszunkat indokoljuk.

a) A 0 pontban az f függvénynek lokális maximuma van.

b) Ha $0 \leq x \leq 2$, akkor $f(x) \leq 0$.

c) Az f függvény képe az origóra szimmetrikus a $(-1, 1)$ intervallumon.



d) Az f függvénynek a $x = 2$ helyen inflexió pontja van.

(12 pont)

3. Krisztiánnak 80 CD-ből álló gyűjteménye van. A CD-k között 48 olyan van, amin több előadó szerepel (T), 24 olyan van, amin egy előadó vagy együttes számai vannak (E), és 8 hangszeres zenei CD-je (H) is van. Sajnos Krisztián nem túl rendes, és az összes CD egy fiókban hever egymás hegyén-hátán.

Egyik barátja megkéri, hogy vigyen el a partijára 5 CD-t. Mivel – mint mindig – Krisztián nagy rohanásban van, anélkül, hogy a fiókba nézne, kivesz onnan 5 CD-t.

a) Mi a valószínűsége annak, hogy csak hangszerest visz?

b) Mi a valószínűsége, hogy az öt CD között lesz legalább egy (T), viszont nem lesz (H)?

c) Krisztián rápillantott a kezében lévő CD-kre, és látta, hogy a legfelső (H). Mi a valószínűsége, hogy a többi is az?

(13 pont)

4. Oldjuk meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán:

a) $2^{4x-1} \cdot 4^{2x+3} = 8^x$;

b) $\sqrt{x - \sqrt{x+2}} \leq 2$.

(14 pont)

II. rész

5. A Schiller Gimnázium diákjainak mindegyike első idegen nyelvként angolt tanul, és legalább egy, legfeljebb két nyelvet választhatnak a francia, spanyol és latin közül. A 10. évfolyam 72 diákjából 40-en két nyelvet is választottak. 48-an tanulnak franciául, 40-en spanyolul és valahányan latinul. 24-en tanulnak franciául és spanyolul is, és 12-en franciául és latinul.

a) Hányan tanulnak összesen latinul; és ebből hányan spanyolul is?

Az évfolyamról egy tanulót véletlenszerűen kiválasztva mi annak a valószínűsége, hogy

b) franciául és spanyolul,

c) franciául vagy spanyolul,

d) vagy franciául, vagy latinul (de nem mindkét nyelven) tanul?

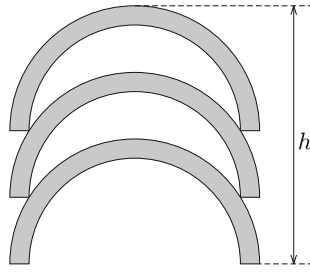
(16 pont)

6. Egy parkban néhány, betonból készült, félgömb formájú virágtartót használnak. A félgömbök belső sugara 44 cm, falvastagsága 8 cm, a beton sűrűsége $2,2 \text{ g/cm}^3$.

a) Hány m^3 virágföld fér egy ilyen tartóba?

b) Milyen nehéz egy tartó?

c) A tél beállta előtt mindegyik tartót kiürítik, majd hármat-hármat egymásra helyeznek. Milyen magas egy ilyen rakás?

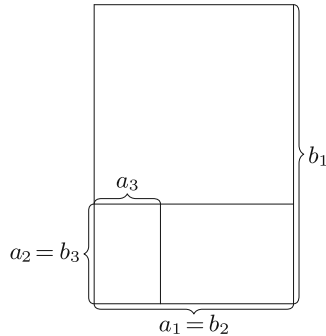


d) Tavasszal újra kihelyezik a tartókat. Előtte fehérre meszelik a tartók külső részét (a peremet is). Egy-egy virágtartónak mekkora területű része lesz így frissen meszelve (cm^2 -ben)? (16 pont)

7. Egy téglalap oldalai $a_1 = 2$ m és $b_1 = 3$ m. Felosztjuk két téglalagra az ábrán látható módon úgy, hogy az egyik hasonló az elsőhöz, oldalai a_2 és $b_2 = a_1$. Ezt a második téglalapot is felosztjuk úgy, hogy a kapott két téglalap közül az egyik hasonló hozzá, és ennek a harmadik téglalapnak az oldalai a_3 és $b_3 = a_2$. Ezt az eljárást folytatjuk.

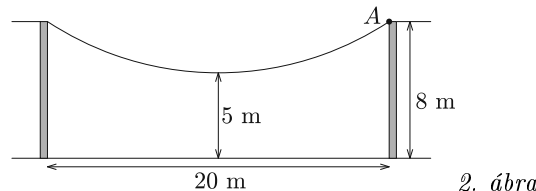
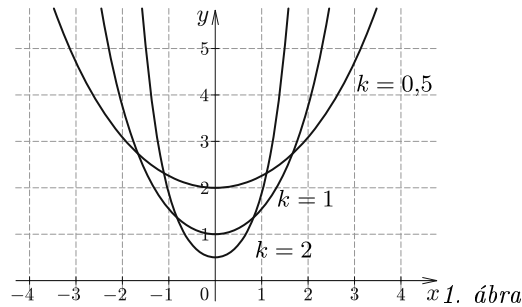
a) Milyen hosszúak az n -edik téglalap oldalai?

b) Milyen n esetén lesz az n -edik és az $(n + 1)$ -edik téglalap területének különbsége 1 cm^2 -nél kisebb?



c) Mekkora az első n téglalap kerületének összege? (16 pont)

8. Egy kalandpark pályáján két fa között egy függőhíd található. Tudjuk, hogy egy ilyen felfüggesztett híd alakja ún. láncgörbe, melynek általános képlete $f(x) = a \cdot \frac{e^{kx} + e^{-kx}}{2k}$, ahol a és k valós paraméterek. Az 1. ábrán a $k = 0,5$; $k = 1$ és $k = 2$ értékekhez tartozó láncgörbék láthatók.



a) A 2. ábrán a híd vázlatos oldalnézetét látjuk. Határozzuk meg a híd görbéjéhez tartozó két paraméter értékét 3 tizedesjegyre kerekítve (a talajszintet tekintsük az x -tengelynek.)

b) Határozzuk meg, hogy az A pontban a híd milyen szöget zár be a vízszintessel.

c) Reklámfelület szeretnének felszerelni a híd egyik oldalára úgy, hogy a felület a talajszint, a híd és a két fa zárja közre. Mekkora felület keletkezik így?

(16 pont)

9. a) Hány osztója van a $2018 \cdot 2019$, illetve a 2018^{2019} számnak?

b) Mennyi az egyik, illetve a másik szám osztóinak az összege?

c) Bizonyítsuk be, hogy 2018^{2019} legalább $3 \cdot 2019$ számjegyből áll.

d) Melyik nagyobb: 2018^{2019} vagy 2019^{2018} ?

(16 pont)