

I. rész

1. a) Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$\log_{2^x+1}(2^{x+1} + 5) = 2. \quad (6 \text{ pont})$$

b) A LOTTÓ (90 számból 5 húzása) megváltoztatására készülnek. Két javaslat van. Az egyik 90-ből 4 szám húzását javasolva a régi módon, a másik meg 45 számból 4 húzását javasolja a sorrend figyelembe vételével, de ez lehetővé tenné, hogy ugyanazt a számot többször is ki lehessen húzni, azaz a már húzott számot ismét visszatennék. Azt akarnák elfogadni, amelyik játék esetében kevesebb az esély a telitalálatra. Zsebszámológép nélkül (!) határozzuk meg, hogy melyiket válasszák.

(6 pont)

2. a) Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet, ahol p valós paraméter:

$$3x + 2p = 5\sqrt{px}. \quad (7 \text{ pont})$$

b) Egy négyszögnek, mely egyidejűleg érintő és húrnégyszög is, az egyik oldala 5 cm és valamelyik oldaltól kezdve pozitív körbejárás szerint véve az oldalakat mértani sorozat elemeit kapjuk. Mekkora a másik három oldal és milyen négyszögről van szó?

(6 pont)

3. a) Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletrendszert:

$$\begin{cases} \frac{x}{y} - 1 = 1 - \frac{y}{x}, \\ x^8 + 2y^6 = x^6 + 2y^8. \end{cases} \quad (6 \text{ pont})$$

- b) Adjuk meg az összes p pozitív prímszámot, melyre a

$$4x^2 - 4(2p + 1)x + (4p^2 - p) = 0$$

egyenlet gyökeinek különbsége egész szám.

(7 pont)

4. a) Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$\sin x + \sqrt{3} \cdot \cos x = 4 \cdot \sin x \cdot \cos x. \quad (7 \text{ pont})$$

- b) Mekkora területet zárnak be az $y = x$ egyenes és a $y = x^3 - 9x^2 + 9x$ görbe?

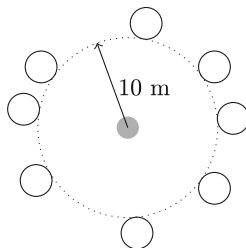
(6 pont)

II. rész

5. Az $y = x^3 - 6x^2 + 15x + c$ függvény egyik érintőjének egyenlete $y = 6x - 5$. Mekkora a c értéke? (16 pont)

6. A *rajz* szerint egy 10 m sugarú kör közepén állunk puskával a kézben, amit 8 darab, 1 m sugarú tölgyfa vesz körbe nem egyenletesen elhelyezkedve (a *rajz* nem a valós elhelyezkedést mutatja). Véletlenszerűen 5 lövést leadva mekkora annak a valószínűsége, hogy legalább 3 lövés kijut a „fa ketrecből”?

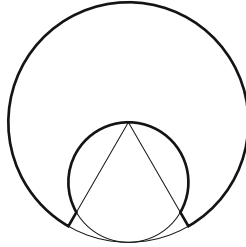
(16 pont)



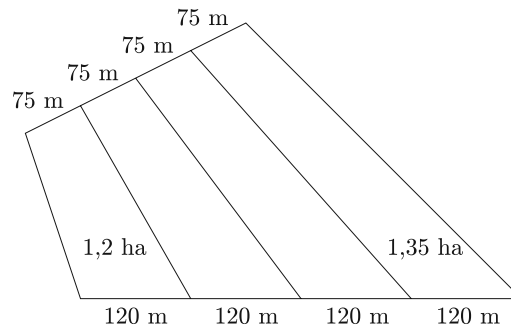
7. Kugli játékhöz könnyen boruló bábut terveztünk. A *rajz* a keresztmetszeti képét ábrázolja. Veszünk egy $R = 30$ cm sugarú gömböt, amiből kivágunk egy a gömb középpontjából induló kúpot úgy, hogy a gömb felületén egy 225π cm² felületdarabot vágunk ki. Ezután egy $r = 5$ cm sugarú gömböt teszünk a csúcsra úgy, hogy a kis gömb középpontja pont a csúcsra illeszkedjék (persze, előtte a szükséges lyukat kivágjuk). Mekkora az így kapott test térfogata? (16 pont)



8. Egy nyakláncra medált terveztünk, melyet a rajz mutat, ahol a medált a vastag vonalak határolják. A nagy kör sugara $R = 4$ cm, a kicsi kör belülről érinti a nagy kört és sugara $r = 2$ cm, amit kivágunk. Hogy ne legyen hegyes a medál, ezért a nagy kör középpontjából szimmetrikusan 60° szög szögtartományában levő részeket is levágjuk. Mekkora a keletkezett medál kerülete, területe? (16 pont)



9. Az *ábra* egy földterület rajzát adja, amelyen 4 tulajdonos osztozik. A nyilvántartásban a középső két terület nagysága olvashatatlan. Mekkora a hiányzó két terület nagysága?



(16 pont)