

**Megoldásvázlatok a 2018/7. szám emelt szintű  
matematika gyakorló feladatsorához  
I. rész**

**1.** Adjuk meg azon  $P(x; y)$  pontok halmazát, amelyek koordinátáira teljesül:

a)  $(x^2 - y^2)(x^2 + y^2 - 4) = 0$ ;

b)  $(x^2 - y^2)^2 + (x^2 + y^2 - 14y + 36)^2 = 0$ . (11 pont)

**Megoldás.** a) A bal oldalon álló kifejezést háromtenyezős szorzatként is írhatjuk:  $(x - y)(x + y)(x^2 + y^2 - 4) = 0$ .

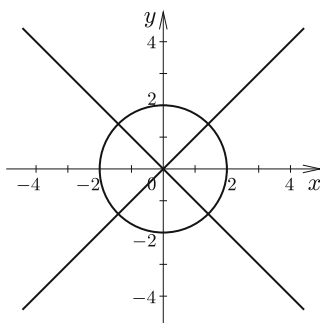
Három eset van.

*I. eset:*  $y = x$ . Az ilyen tulajdonságú  $P$  pontok a koordinátasík I. és a III. negyedének szögfelezőjét alkotják.

*II. eset:*  $y = -x$ . Az ilyen tulajdonságú  $P$  pontok a koordinátasík II. és a IV. negyedének szögfelezőjét alkotják.

*III. eset:*  $x^2 + y^2 = 4$ . Az ilyen tulajdonságú  $P$  pontok az origó középpontú és 2 egység sugarú körvonalat adják.

A feladat megoldását a három ponthalmaz egyesítése adja, amit a *vázlatrajz* szemléltet.



b) Két nemnegatív szám összege csak akkor lehet 0, ha mindkét szám 0. Ezek alapján a következő egyenletrendszert kell megoldanunk:

$$\left. \begin{array}{l} y = x^2, \\ x^2 + y^2 - 14y + 36 = 0. \end{array} \right\}$$

A helyettesítést elvégezve  $x^2$ -re másodfokú egyenletet kapunk:

$$\begin{aligned} x^4 - 13x^2 + 36 &= 0, \\ (x^2)_1 &= 4, \quad (x^2)_2 = 9. \end{aligned}$$

Négy értéket kapunk  $x$ -re:  $x_1 = -2$ ,  $x_2 = 2$ ,  $x_3 = -3$ ,  $x_4 = 3$ . Az egyenletrendszer első egyenletébe visszahelyettesítve kapjuk a második koordinátákat:  $y_1 = 4$ ,  $y_2 = 4$ ,  $y_3 = 9$ ,  $y_4 = 9$ .

Vagyis a keresett ponthalmazban négy pont van:  $P_1(-2; 4)$ ,  $P_2(2; 4)$ ,  $P_3(-3; 9)$ ,  $P_4(3; 9)$ .

*Megjegyzés.* Az egyenletrendszer második egyenlete  $x^2 + (y - 7)^2 = 13$  alakra is hozható. Vagyis az  $y = x^2$  egyenlettel adott parabola és az  $x^2 + y^2 - 14y + 36 = 0$  egyenlettel adott  $K(0; 7)$  középpontú,  $r = \sqrt{13}$  sugarú kör közös pontjainak koordinátáit határoztuk meg.

**2.** A SzÁMADÓ és az ADÓSzÁM egy-egy olyan hatjegyű, a SzÁM és az ADÓ pedig egy-egy olyan háromjegyű szám, amelyben az Sz, Á, M, A, D és Ó betűk különböző pozitív számjegyek.

a) Mennyi a SzÁM + ADÓ összeg, ha SzÁMADÓ + ADÓSzÁM = 678 678?

b) Adjuk meg a SzÁMADÓ számot, ha még azt is tudjuk, hogy  $Sz > A$ , valamint  $\overline{SzÁM} \cdot \overline{ADÓ} = 90\,585$ .

c) Mennyi az ADÓSzÁM, ha  $7 \cdot \overline{ADÓSzÁM} = 6 \cdot \overline{SzÁMADÓ}$ ? (12 pont)

**Megoldás.** a) Legyen:  $\overline{SzÁM} = x$ ,  $\overline{ADÓ} = y$ . Ekkor  $\overline{SzÁMADÓ} = 1000x + y$ ,  $\overline{ADÓSzÁM} = 1000y + x$ . Ezek alapján:

$$\begin{aligned} 1000x + y + 1000y + x &= 678\,678, \\ 1001(x + y) &= 678\,678, \\ x + y &= 678. \end{aligned}$$

Vagyis:  $\overline{SzÁM} + \overline{ADÓ} = 678$ .

b) Mivel  $\overline{SzÁM} \cdot \overline{ADÓ} = 90\,585$ , ezért a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$\left. \begin{array}{l} y = 678 - x, \\ xy = 90\,585. \end{array} \right\}$$

A behelyettesítés után másodfokú egyenletet kapunk:  $x^2 - 678x + 90\,558 = 0$ . Megoldóképlettel:  $x_1 = 495$ ,  $x_2 = 183$ .

Mivel  $Sz > A$ , ezért  $\overline{Sz\acute{A}M} = x = 495$ .

A keresett hatjegyű szám:  $\overline{Sz\acute{A}MAD\acute{O}} = 495\,183$ .

c) A már bevezetett jelölésünkkel:

$$7(1000y + x) = 6(1000x + y),$$

$$6994y = 5993x,$$

$$2 \cdot 13 \cdot 269 \cdot y = 13 \cdot 461 \cdot x,$$

$$2 \cdot 269 \cdot y = 461 \cdot x.$$

Mivel  $x$  és  $y$  is háromjegyű szám, ezért csakis  $\overline{Sz\acute{A}M} = x = 2 \cdot 269 = 538$ ,  $\overline{AD\acute{O}} = y = 461$  lehet. Vagyis  $\overline{AD\acute{O}Sz\acute{A}M} = 461\,538$ .

**3. A Szép Utazások iroda tájékoztatójában a repülőgépen szállítható csomagokról ez olvasható:**

„Az iroda által bérelt járatokon 15 kg/fő feladott poggyász és 1 db 8 kg/fő kézipoggyász szállítása díjtalan, a többletsúlyért fizetni kell. Mindegyik poggyásznak téglatest alakúnak kell lennie. A feladott poggyász egyik élhossza sem lehet több, mint 150 cm, és a három különböző irányú él hosszának összege nem haladhatja meg a 220 cm-t. A kézipoggyász maximális hossza 56 cm, maximális szélessége 45 cm, maximális mélysége 25 cm lehet, azonban a három méret összesen nem haladhatja meg a 115 cm-t.”

a) Bea kézipoggyásznak való kisbőröndöt vásárol az utazáshoz. A boltban a megfelelő bőröndök egyik élhossza 25 cm. Szeretné, ha az élhosszak összege a megengedett maximális, ugyanakkor a bőrönd felszíne 8500 cm<sup>2</sup> lenne. Milyen méretű bőrönd felelne meg ezeknek a feltételeknek?

b) László az utazáshoz bőröndöt szeretne vásárolni, amibe a feladható poggyászként engedélyezett 15 kg-ot bepakolhatja. A neki tetsző bőröndök egyik élének hossza 40 cm volt. Milyen méretű bőröndöt válasszon ezek közül, ha szeretné, hogy a térfogata maximális legyen? Mekkora lesz ekkor a bőrönd térfogata? (14 pont)

**Megoldás.** a) Mivel a három különböző irányú él hosszának összege 115 cm, és az egyik él 25 cm, ezért a másik két él hossza legyen  $x$  cm és  $90 - x$  cm. Ezek alapján a felszín:

$$2 \cdot [25x + 25(90 - x) + x(90 - x)] = 8500,$$

$$25x + 2250 - 25x + 90x - x^2 = 4250,$$

$$x^2 - 90x + 2000 = 0.$$

Megoldóképlettel:  $x_1 = 50$ ,  $x_2 = 40$ . Ekkor a  $90 - x$  élhosszra a 40, illetve az 50 adódik.

Vagyis a kisbőrönd három adata: 25 cm, 50 cm, 40 cm, ami a kiírás további feltételeinek is megfelel.

b) Mivel maximális térfogatot szeretnénk elérni, ezért az élek összegére vonatkozó maximumot használjuk. Az élek hossza: 40 cm,  $x$  cm és  $180 - x$  cm. Ekkor a térfogatot  $x$  függvényében meg tudjuk adni:  $V(x) = 40 \cdot x \cdot (180 - x)$ .

Mivel ennek a másodfokú függvénynek a főegyütthatója negatív, ezért van maximuma. Azt is tudjuk, hogy a zérushelyei a 0 és a 180, ezért a maximum helye:  $x = 90$ . Vagyis a maximális térfogatú bőrönd adatai: 40 cm, 90 cm, 90 cm. Ezek az adatok a tájékoztatóban szereplő összes kérdésnek megfelelnek.

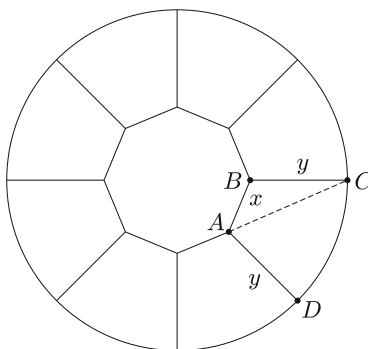
A megadott feltételek mellett a maximális térfogat:

$$V(90) = 40 \cdot 90 \cdot (180 - 90) = 324\,000 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

**4. A Fővárosi Nagycirkusz 13 méter átmérőjű porondjának vázlatát mutatja az ábra. A vízi cirkuszi előadásban a porond kilenc, azonos területű része függőlegesen, le-föl mozgatható.**

a) Mekkora a porond közepén látható szabályos nyolcszög területe?

b) A nyolc egybevágó (trapézszerű) síkidomot a könnyebb mozgatás miatt körben egy nagyon speciális anyaggal borították. Ehhez előzetesen meg kellett határozni ezeknek a síkidomoknak a kerületét. Mekkora a kerülete az ABCD trapézszerű síkidomnak?



c) A nyolc egybevágó síkidom függőleges mozgatásához megépített szerkezet miatt minden ilyen síkidom alatt szükség volt egy átlós merevítőre. Adjunk képletet az  $AC$  merevítő hosszára az ábra  $x$  és  $y$  hosszúságú szakaszának ismeretében. (A képletben előforduló szögfüggvényértékek négy tizedes jegy pontossággal szerepeljenek.) (14 pont)

**Megoldás.** a) A kör alakú porond sugara  $R = 6,5$  m, ezért a területe:  $T = 6,5^2 \cdot \pi = 42,25 \cdot \pi$  (m<sup>2</sup>).

Mind a kilenc síkidom – a nyolc egybevágó (trapézszerű) és a közepén látható szabályos nyolcszög – területe egyenlő. Vagyis a keresett síkidom területe:

$$t = \frac{T}{9} = \frac{42,25 \cdot \pi}{9} \approx 14,748 \text{ (m}^2\text{)}.$$

b) Az  $ABCD$  trapézszerű síkidom kerületének  $CD$  íve a  $R = 6,5$  m sugarú körvonal nyolcadrészeivel megegyező hosszúságú:  $\frac{2 \cdot 6,5 \cdot \pi}{8} \approx 5,105$  (m).

Az  $AD = BC = y$  szakasz hosszát megkapjuk, ha a porond sugarából elvesszük a  $14,748$  m<sup>2</sup> területű szabályos nyolcszög köré írt körének  $r$  sugarát.

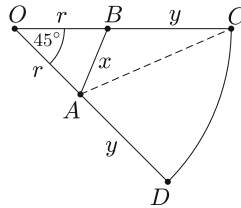
A nyolcszög területét nyolc egybevágó egyenlőszárú háromszög területének összegeként is megkapjuk. Ezeknek a háromszögeknek  $r$  hosszúságú a száruk, és  $45^\circ$  a szárszögük. Vagyis a nyolcszög területe:

$$t = 8 \cdot \frac{r^2 \cdot \sin 45^\circ}{2} = 14,748, \quad \text{amiből} \quad r \approx 2,283 \text{ m}.$$

Ezek alapján:  $y = R - r = 6,5 - 2,283 = 4,217$  (m).

Az  $AB$  szakasz hossza a  $14,748$  m<sup>2</sup> területű szabályos nyolcszög oldalának hosszával egyenlő. Ezt az  $OAB$  egyenlőszárú háromszögből kaphatjuk például koszinusz-tétellel:

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{r^2 + r^2 - 2r^2 \cdot \cos 45^\circ} = \\ &= \sqrt{2 \cdot 2,283^2 - 2 \cdot 2,283^2 \cdot \cos 45^\circ} \approx 1,747. \end{aligned}$$



A kapott eredmények alapján a keresett kerület:

$$K = 5,105 + 2 \cdot 4,217 + 1,747 = 15,286 \text{ (m)}.$$

c) A szabályos nyolcszög egy belső szöge:  $\alpha = \frac{(8-2) \cdot 180^\circ}{8} = 135^\circ$ . A trapézszerű síkidom  $B$ -nél lévő  $\beta$  szögére teljesül, hogy  $\alpha + 2\beta = 360^\circ$ , azaz  $\beta = 112,5^\circ$ . Az  $ABC$  háromszögre alkalmazzuk a koszinusztételt:  $AC^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cdot \cos 112,5^\circ$ . Tehát a merevítő hosszát a következő képlettel számolhatjuk:

$$AC = \sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \cdot \cos 112,5^\circ} \approx \sqrt{x^2 + y^2 + 0,7654 \cdot xy}.$$

## II. rész

5. Rebeka új szemüveget vásárol, de nem szeretné, hogy a lencsékért 25 000 Ft-nál többet fizessen. A szaküzletben kiderül, hogy ha hagyományos lencsét vásárolna, akkor 4280 Ft-ot fizetne a két lencséért. Rebeka tudja, hogy a minőséget a különböző típusú bevonatok javíthatják, ezért tükröződésmentes és karcolás mentes bevonatot kér a lencsékre. A bevonatok mindegyikének 99 Ft/cm<sup>2</sup> az ára. (A lencsék felületét síknak vehetjük.) Azt is eldöntötte, hogy a hagyományosnál vékonyabb lencsét szeretne választani. A készlet szerint ez lehet 10, 20, 30, 40, illetve 50%-kal vékonyabb. Ezeknek a lencséknek az ára a hagyományoshoz képest rendre 40, 80, 160, 320, 640%-kal drágább.

Egy lencse határvonalát az  $f(x) = 2 - \frac{2}{25}x^2$  és a  $g(x) = \frac{x^2}{5} - 5$  hozzárendeléssel megadott függvények grafikonja által meghatározott síkidom határvonalára adja. A koordináta-rendszer egysége 5 mm-rel egyenlő. Mekkora területű részt foglal el egy lencse az asztalon? A hagyományos lencséhez képest hány százalékkal választhat vékonyabb lencsét Rebeka? (16 pont)

**Megoldás.** Meghatározzuk, hogy a megadott függvények hol metszik egymást:

$$2 - \frac{2}{25}x^2 = \frac{x^2}{5} - 5,$$

$x_1 = -5$ ,  $x_5 = 5$ . A kérdéses terület nagyságát határozott integrállal számoljuk ki, az intervallum a  $[-5; 5]$ . A két „görbealatti terület” különbsége adja a síkidom területét:

$$T = \int_{-5}^5 \left( 2 - \frac{2}{25}x^2 - \frac{x^2}{5} + 5 \right) dx = 2 \cdot \int_0^5 \left( 7 - \frac{7}{25}x^2 \right) dx = 14 \cdot \int_0^5 \left( 1 - \frac{1}{25}x^2 \right) dx.$$

Alkalmazzuk a Newton–Leibniz tételt:

$$T = 14 \cdot \left[ x - \frac{1}{25} \cdot \frac{x^3}{3} \right]_0^5 = 14 \cdot \left( 5 - \frac{1}{25} \cdot \frac{125}{3} \right) = \frac{140}{3} \text{ (területegység).}$$

Mivel a koordinátarendszer egysége 5 mm-rel egyenlő, ezért egy lencse  $\frac{35}{3} \text{ cm}^2$ -es részt foglal el az asztalon.

Két lencsére kétféle réteget vásárol Rebeka, amelyeknek 99 Ft/cm<sup>2</sup> az ára. Vagyis ezekért összesen  $2 \cdot 2 \cdot 99 \cdot \frac{35}{3} = 4620$  Ft-ot fog fizetni. A maradék 20 380 Ft-ból kell döntenie, hogy milyen vékony lencsét vásárolhat.

A készlet legvékonyabb tagjától visszafelé számoljunk. Az 50%-os lencsék ára  $4280 \cdot 7,4 = 31\,672$  Ft lenne. Ilyet nem vehet. A 40%-os lencsék ára  $4280 \cdot 4,2 = 17\,976$  Ft lenne. Ezt már választhatja Rebeka.

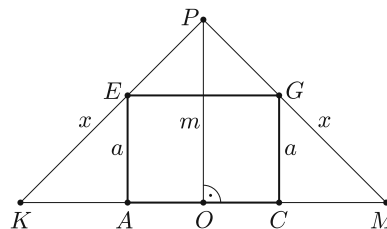
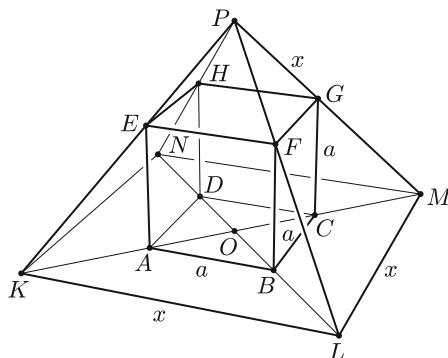
**6.** A Rubik-kocka feltalálásának évfordulójára díszdobozos kiadást terveznek. Az egyik változat szerint legyen a doboz egy olyan négyoldalú szabályos gúla, amelynek alapéle ugyanolyan hosszú, mint az oldaléle. Az elképzelés szerint a kocka egyik lapja illeszkedik a gúla alaplappjára, az ezzel párhuzamos lap csúcsai pedig a gúla oldaléleire.

a) Mekkora legyen a doboz éleinek hossza, ha a Rubik-kocka élhosszúsága:  $a = 5,7$  cm?

b) A sok-sok terv közül azonnal elvetették azokat, amelyeknél a játék a doboz 35%-át sem tölti ki. A fenti terv megfelelő-e ezen feltétel ismeretében? (16 pont)

**Megoldás.** a) Használjuk a vázlatrajzok jelöléseit. Vettük a gúla  $P$  csúcsára és az alaplapp két szemközti csúcsára, a  $K$ -ra és az  $M$ -re illeszkedő síkmetszetét. Ez egy egyenlőszárú háromszög, amelynek szára  $x$  cm, az alapja egy  $x$  oldalhosszúságú négyzet átlójának hosszával egyenlő, azaz  $x\sqrt{2}$  cm hosszú. Ennek a háromszögnek az alaphoz tartozó magassága a  $KOP$  derékszögű háromszögből Pitagorasz-tétellel:

$$OP = m = \sqrt{x^2 - \left( \frac{\sqrt{2}}{2}x \right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}x.$$



Mivel  $OP = KO = MO (= \frac{\sqrt{2}}{2}x)$ , ezért  $KOP$  (és  $MOP$  is) egyenlőszárú derékszögű háromszög.  $KA = KO - AO = \frac{\sqrt{2}}{2}(x - a)$ , mivel  $AO$  egy  $a$  oldalú négyzet átlójának fele.

A  $KOP$  derékszögű háromszög hasonló a  $KAE$  derékszögű háromszöghöz, ugyanis a  $PKO$  szög közös hegyesszög. Ezek alapján  $KAE$  is egyenlőszárú derékszögű háromszög. Vagyis  $KA = AE$ , azaz  $\frac{\sqrt{2}}{2}(x - a) = a$ .

Fejezzük ki az  $x$ -et, és helyettesítsük be az  $a$  adott értékét:  $x = a(1 + \sqrt{2}) \approx 13,8$  (cm).

A doboz éleinek hossza tizedcentiméter pontossággal: 13,8 cm.

b) A gúla alaplajának élhossza már ismert:  $x = a(1 + \sqrt{2}) \approx 13,8$  (cm). Ezek alapján a gúla magassága:  $m = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 13,8 \approx 9,8$  (cm). A díszdoboz térfogata:

$$V_1 = \frac{x^2 \cdot m}{3} = \frac{13,8^2 \cdot 9,8}{3} \approx 622,1 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

A kocka térfogata:  $V_2 = a^3 = 5,7^3 \approx 185,2$  (cm<sup>3</sup>).

Százalékban kifejezve:  $\frac{V_2}{V_1} \cdot 100$ , azaz kerekítve 29,8%-át foglalja el a Rubik kocka a doboz térfogatának. Vagyis ez a terv nem felel meg az elvárásoknak.

**7. a)** A tízes számrendszerben felírt egyjegyű  $a$ , kétjegyű  $\overline{ab}$  és háromjegyű  $\overline{abb}$  szám ebben a sorrendben egy számtani sorozat első, második és tizenkettedik tagja. (Azonos betűk azonos, különböző betűk különböző számjegyeket jelölnek.) Hány darab megfelelő kétjegyű szám van? Mennyi a legnagyobb megfelelő kétjegyű szám esetén a számtani sorozat első 20 tagjának összege?

b) A pozitív számokból álló  $(a_n)$  mértani sorozat kilenc egymást követő tagjából képezzünk három számot úgy, hogy összeadjuk az első hármat, aztán a következő hármat, és végül az utolsó hármat. Mutassuk meg, hogy az így kapott három szám tízes alapú logaritmusai egy számtani sorozat három egymást követő tagja lesz. (16 pont)

**Megoldás. a)** Legyen a számtani sorozat első tagja  $a$ , differenciája  $d$ . Vagyis:

$$a_1 = a,$$

$$a_2 = \overline{ab} = 10a + b = a + d,$$

$$a_{12} = \overline{abb} = 100a + 11b = a + 11d.$$

Az  $a_2$  alapján  $11d = 11(9a + b) = 99a + 11b$ ,  $a_{12}$  alapján  $11d = 99a + 11b$ . Tehát tetszőleges  $a$  és  $b$  esetén megfelelő az  $a$ ,  $\overline{ab}$ ,  $\overline{abb}$  számhármast.

Az  $a$  tetszőleges pozitív számjegy (9 lehetőség), a  $b$  pedig tetszőleges számjegy lehet, de nem egyenlő  $a$ -val (9 lehetőség). Így  $\overline{ab}$  81-féle szám lehet. Ezek közül a legnagyobb a 98. Ebben az esetben a sorozat első eleme 9, a differenciája 89.

$$S_{20} = \frac{20}{2} (2 \cdot 9 + 19 \cdot 89) = 17\,090.$$

b) Legyen a mértani sorozat kilenc egymást követő tagja:  $a; aq, aq^2, aq^3, aq^4, aq^5, aq^6, aq^7, aq^8$ , ahol  $a > 0, q > 0$ . Megadjuk a feladat szövege szerinti három számot  $a$ -val és  $q$ -val:

$$\lg(a + aq + aq^2);$$

$$\lg(aq^3 + aq^4 + aq^5) = \lg(a + aq + aq^2) + 3 \lg q;$$

$$\lg(aq^6 + aq^7 + aq^8) = \lg(a + aq + aq^2) + 6 \lg q.$$

Ez egy  $3 \lg q$  differenciájú számtani sorozat három egymást követő tagja.

**8.** Az  $ABCDEFGH$  téglatestben úgy jelöltük a csúcsokat, hogy az  $ABCD$  alaplagra az  $AE, BF, CG$  és  $DH$  élek merőlegesek. Tudjuk, hogy a  $HAD$  szög  $30^\circ$ -os, a  $FAB$  szög pedig  $60^\circ$ -os.

a) Mekkora az  $AFH$  háromszög területe, ha a téglatest térfogata  $3375 \text{ cm}^3$ ?

b) Mekkora szögben hajlik a téglatest  $AG$  testátlója az  $ABCD$  laphoz?

c) Dávid a téglatest ábráját a 8 csúccsal, a 12 élével és az  $AH$ , valamint  $AF$  éllel egy gráfnak tekinti. Barbara pedig a hiányzó élek berajzolásával készített egy teljes gráfot. Azt állítja, hogy rajzolás közben minden csúcsot érintett, viszont egy élt csak egyszer rajzolt meg, és közben a ceruzáját nem kellett felemelnie a papírról. Miért tartjuk ezt hihetőnek? Melyik csúcsból kezdhette a rajzolást, és melyik csúcsba érkezhett? (16 pont)

**Megoldás. a)** Legyen  $AB = a$ . Mivel az  $FAB$  derékszögű háromszögben  $A$ -nál  $60^\circ$ -os szög van, ezért  $AF = 2a$ , és Pitagorasz-tétellel  $BF = a\sqrt{3}$ . A téglalapban  $BF = DH$ , azaz  $DH = a\sqrt{3}$ . Mivel a  $HAD$  derékszögű háromszögben  $A$ -nál  $30^\circ$ -os szög van, ezért  $AH = 2a\sqrt{3}$ , és Pitagorasz-tétellel  $AD = 3a$ . Most már  $a$ -val kifejeztük a téglatest mindháromféle oldalának hosszát. Ezek segítségével a téglatest  $EFGH$  lapjának  $FH$  lapátlóhossza is megadható:

$$FH = \sqrt{a^2 + (3a)^2} = \sqrt{10}a.$$

Koszinusz-tétellel meghatározható az  $AFH$  háromszög  $A$ -nál lévő  $\varphi$  szöge:

$$FH^2 = AF^2 + AH^2 - 2 \cdot AF \cdot AH \cdot \cos \varphi,$$

$$(\sqrt{10}a)^2 = (2a)^2 + (2a\sqrt{3})^2 - 2 \cdot 2a \cdot 2a\sqrt{3} \cdot \cos \varphi,$$

$$10 = 4 + 12 - 2 \cdot 2 \cdot 2\sqrt{3} \cdot \cos \varphi,$$

$$\cos \varphi = \frac{3}{4\sqrt{3}},$$

$$\varphi \approx 64,34^\circ.$$

Felírhatjuk a téglatest térfogatát:  $V = a \cdot \sqrt{3}a \cdot 3a = 3\sqrt{3} \cdot a^3 = 3375$ , ahonnan  $a \approx 8,66$  cm. Használhatjuk az  $AFH$  háromszögre a szinuszos területképletet:

$$T_{AFH\Delta} = \frac{AF \cdot AH \cdot \sin 64,34^\circ}{2} = \frac{2a \cdot 2a\sqrt{3} \cdot \sin 64,34^\circ}{2} \approx 234,2 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

b) A kérdéses  $\lambda$  szög a  $CAG$  derékszögű háromszög  $A$ -nál lévő szögével egyenlő:  $\operatorname{tg} \lambda = \frac{\sqrt{3}a}{\sqrt{10}a} = \sqrt{0,3}$ ,  $\lambda \approx 28,7^\circ$ .

c) A megadott  $A, B, C, D, E, F, G$  és  $H$  csúcspontokkal adott gráfban a fokszámok rendre a következők: 5, 3, 3, 3, 3, 4, 3, 4. Mivel a 8 csúcsú teljes gráf minden pontjának 7 a fokszáma, ezért a Barbara által rajzolt  $A, B, C, D, E, F, G$  és  $H$  csúcspontokkal adott gráfban a fokszámok rendre a következők: 2, 4, 4, 4, 4, 3, 4, 3. Mivel pontosan két páratlan fokszámú csúcs van, ezért hihetőnek tartjuk Barbara kijelentését. Az  $F$  és a  $H$  csúcsok fokszáma páratlan, ezért az egyik a kiindulópont, a másik a végpont lehet.

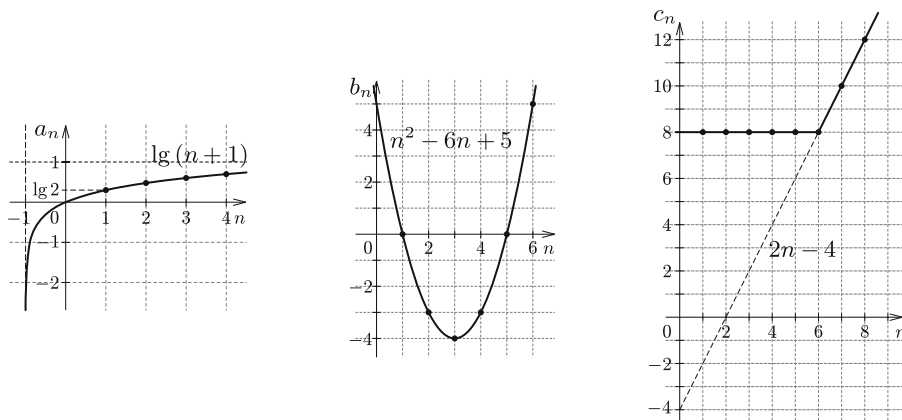
Ilyen módon egy lehetséges útvonal megadható, például:  $H-B-G-D-B-E-C-A-G-E-D-F-C-H-F$ .

9. Legyen  $n$  pozitív egész szám. Adottak az alábbi sorozatok:

$$\begin{aligned} \{a_n\} &= \{\lg(n+1)\}; \\ \{b_n\} &= \left\{ \frac{n^3 - 5n^2 - n + 5}{n+1} \right\}; \\ \{c_n\} &= \{|n+2| + |n-6|\}. \end{aligned}$$

Válaszoljunk (indoklással) mindhárom esetben, hogy a sorozat alulról, felülről korlátos vagy nem, illetve monoton vagy nem. Ha van, adjunk meg egy alsó, illetve felső korlátot. (16 pont)

**Megoldás.** Az  $\lg$  függvény szigorú monoton növekedése miatt az  $\{a_n\}$  sorozat is szigorú monoton növekedő. Ebből az is következik, hogy a sorozat első tagja, azaz az  $\lg 2$  alsó korlát (jelen esetben a legnagyobb). Az  $\lg$  függvény tulajdonságainak ismeretében tudjuk, hogy felső korlát nincs.



A  $\{b_n\}$  sorozat általános tagjának formuláját egyszerűsíthetjük:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{n^3 - 5n^2 - n + 5}{n+1} = \frac{n^2(n-5) - (n-5)}{n+1} = \frac{(n-5)(n-1)(n+1)}{n+1} = \\ &= (n-5)(n-1) = n^2 - 6n + 5. \end{aligned}$$

A másodfokú kifejezés főegyütthatója 1, zérushelyei az 1 és az 5, minimum helye a 3. A sorozat szempontjából ez azt jelenti, hogy először csökkenő, aztán növekedő. Vagyis nem monoton a sorozat.

A másodfokú függvény tulajdonsága alapján mondható, hogy a sorozat egyik alsó korlátja (jelen esetben a legnagyobb alsó korlátja) a  $b_3$ , azaz  $-4$ . A másodfokú függvény tulajdonságaiból az is következik, hogy ennek a sorozatnak nincs felső korlátja.

Ha  $n = 1, 2, 3, 4, 5$ , akkor a  $\{c_n\}$  hozzárendelési szabálya:  $c_n = |n+2| + |n-6| = n+2 - (n-6) = 8$ .

Ha  $n > 5$ , akkor a  $\{c_n\}$  hozzárendelési szabálya:  $c_n = |n+2| + |n-6| = n+2 + n-6 = 2n-4$ . Mivel a lineáris függvény meredeksége most pozitív, ezért ezekre az  $n$ -ekre a sorozat szigorúan monoton növekedő.

Összességében monoton növekedő, hiszen a sorozat első öt tagja 8, a továbbiak pedig ennél nem kisebbek.

Az elmondottakból az is következik, hogy a sorozat alulról korlátos. Egy lehetséges alsó korlát 8 (ami a legnagyobb alsó korlát). A lineáris függvény ismeretében azt is tudjuk, hogy felső korlát nincs.