

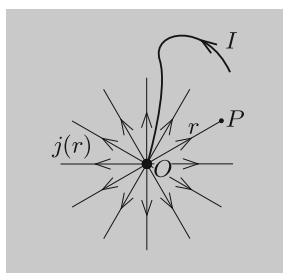
Síkbeli elektromos vezetési problémák II. rész (fizikai alkalmazások)

A cikk I. (a múlt havi számunkban megjelent) részében általánosságban tárgyaltuk, hogy miként használhatók fel a sík arány- és szögtartó transzformációi különböző síkbeli áramlási (elektromos vezetési, hővezetési és folyadékáramlási) problémák összekapcsolására, és konkrétan megadtunk néhány ilyen transzformációt (ún. konform leképezést). Most alkalmazzuk ezeket fizikai problémák megoldására. A tárgyalást kiegészítjük még két – bizonyos esetekben nagyon hasznos – eljárás ismertetésével: a szimmetriák figyelembe vételének lehetőségével, illetve a tükrözési módszer alkalmazásával.

Végtelen síklap

Vezessünk be egy nagy kiterjedésű, vékony (δ vastagságú és ρ fajlagos ellenállású), homogén és izotrop síklapba egy O pontban I erősségű áramot. Határozzuk meg két, a síklap felületén lévő pont közötti feszültséget! A *forgási szimmetria* miatt az O pont körül *sugaras* áramlási tér alakul ki (5. ábra), azaz ettől a ponttól r távolságra a felületi áramsűrűség

$$(1) \quad j(r) = \frac{I}{2r\pi\delta},$$



5. ábra

hiszen a bevezetett I erősségű áram a $2r\pi\delta$ felületen keresztül, szimmetrikusan áramlik szét a lapban.

Ahhoz, hogy két tetszőleges pont között meghatározzuk a feszültséget, szükségünk van az (ugyancsak forgásszimmetrikus, emiatt sugaras irányítottságú) elektromos térerősség $E(r)$ nagyságára. A differenciális Ohm-törvény szerint $\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}(\mathbf{r})/\rho$, így tehát

$$E(r) = \frac{\rho I}{2r\pi\delta}.$$

A lemez tetszőleges P pontjának potenciálját a térerősség segítségével adhatjuk meg:

$$(2) \quad \Phi(r) = - \int_{r_0}^r E(r) dr = - \frac{\rho I}{2\pi\delta} \int_{r_0}^r \frac{dr}{r} = \frac{\rho I}{2\pi\delta} \ln \frac{r_0}{r},$$

ahol r_0 egy önkényesen választott Q pont O -tól mért távolsága, r pedig a P pont távolsága az áram bevezetési pontjától. A potenciált a Q pontban nullának választjuk. Ezzel, ha a két pont r_1 , illetve r_2 távolságra van O -tól, a közöttük lévő feszültség:

$$(3) \quad U_{1,2} = \Phi(r_2) - \Phi(r_1) = \frac{\rho I}{2\pi\delta} \ln \frac{r_1}{r_2}.$$

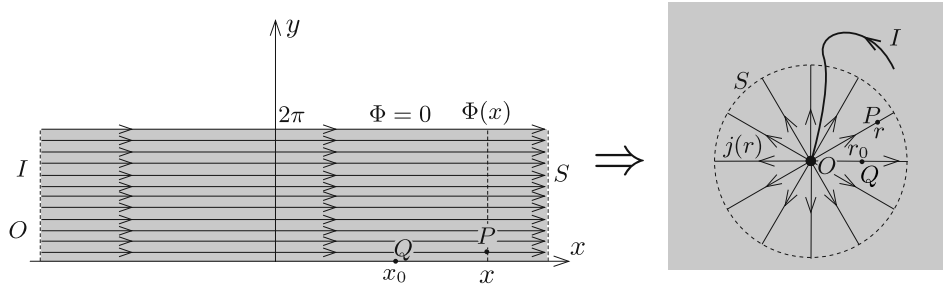
Ugyanezt az eredményt a cikk I. részében leírt „szalag-leképezés” segítségével is megkaphatjuk. Ha egy 2π széles, δ vastagságú, vezető szalagban összesen I áram folyik¹, akkor a szalag széleivel párhuzamos irányú áramsűrűség nagysága mindenhol $j_0 = I/(2\pi\delta)$, az elektromos térerősség tehát

$$\mathbf{E} = (E_x, 0); \quad E_x = \rho j_0 = \frac{I\rho}{2\pi\delta}.$$

Ennek megfelelően az elektromos potenciál a szalag x koordinátával rendelkező P pontjában (ha az x_0 helyen a potenciált nullának vesszük):

$$\Phi(x) = (x_0 - x) \cdot E_x = (x_0 - x) \frac{I\rho}{2\pi\delta}.$$

¹ Ilyen árameloszlás úgy hozható létre, hogy a nagyon („végtelenül”) hosszú szalag elegendően távoli végeinél sok, kicsi, jól vezető, a szalag hosszanti oldaléleire merőleges egyenes mentén elhelyezkedő elektródákra akkora feszültséget kapcsolunk, ami éppen I erősségű áramot eredményez.



6. ábra

Alkalmazzunk most egy olyan leképezést, ami a szalagot a végtelen síklapba viszi át (6. ábra). Az $r = e^x$ összefüggésnek megfelelően (az „új koordináták” jelölésénél az egyszerűség kedvéért a vesszőket nem írjuk ki) az áram O bevezetési pontjai ($x = -\infty$) a síklap origójába ($r = 0$), az S kivezetési pontok ($x = +\infty$) pedig egy „végtelen távoli” körbe mennek át. A potenciál az origótól $r = e^x$ távol lévő P pontjában

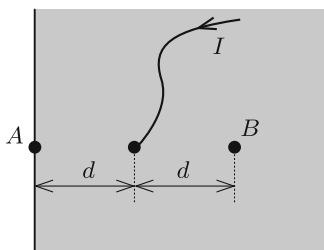
$$\Phi(r) = (x_0 - x) \frac{\varrho I}{2\pi\delta} = \frac{\varrho I}{2\pi\delta} \ln \frac{r_0}{r}$$

(ahol $r_0 = e^{x_0}$), két tetszőleges pont közötti feszültség pedig

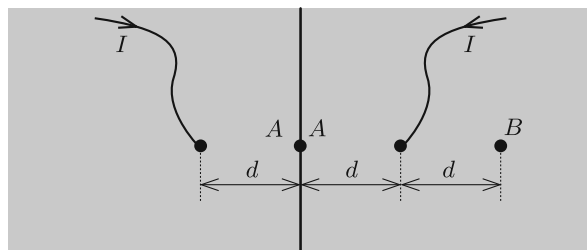
$$U_{1,2} = \Phi(r_2) - \Phi(r_1) = \frac{\varrho I}{2\pi\delta} \ln \frac{r_1}{r_2},$$

ahogy ezt már – más módszerrel – korábban megkaptuk.

Tekintsük a 7. ábrán látható, félvégtelen síklapot (végtelen félsíkot), amelybe a szélétől d távol lévő pontnál I erősségű áramot vezetünk, és számítsuk ki az A és B pontok közötti feszültséget. Ebben az esetben az áramsűrűség meghatározásánál figyelembe kell vennünk, hogy a lemez szélén az áramsűrűség-vektornak nem lehet határfelületre merőleges komponense. Ha viszont a félvégtelen síklapot az áramot bevezető elektródával együtt *tükrözzük* a lap szélére (határvonalára) a 8. ábrán látható módon, a félvégtelen síklap végtelen síklapba vihető át úgy, hogy az áramsűrűség-eloszlás az eredeti lemezben változatlan marad, miközben a határfeltétel is teljesül.



7. ábra



8. ábra

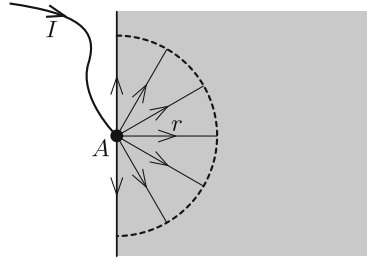
A tükrözés után kapott „teljes sík” elrendezésben mindkét elektróda hatását figyelembe kell vennünk. Ezt úgy tehetjük meg, hogy először csak az egyik, majd csak a másik elektróda jelenlétét tekintjük, és minden pontban a két eset potenciál- és árameloszlásának összegét, *szuperpozícióját* vesszük.² Mivel mindkét elektródán az áram a lemezbe befelé folyik, ezért a potenciálok előjelei azonosak. Tehát a végtelen síklapnál levezetett képlet alapján a feszültség nagysága (abszolút értéke)

$$U_{AB} = \left| \frac{\varrho I}{2\pi\delta} \ln \frac{d}{d} + \frac{\varrho I}{2\pi\delta} \ln \frac{d}{3d} \right| = \frac{\varrho I}{2\pi\delta} \ln 3.$$

² A szuperponálhatóság azért „működik”, mert az elektromos vezetést leíró Ohm-törvény lineáris.

Érdemes megemlíteni, hogy abban az esetben, ha az áramot a lemez szélén lévő A pontban vezetjük be, akkor nemcsak a feszültséget, hanem az áramsűrűséget is könnyen megadhatjuk. Ilyenkor ugyanis a határvonalra történő tükrözés után egy végtelen síklemezt kapunk, amelybe most $2I$ áramot vezetünk be az A pontban. Ennél ismerjük, hogy az áramsűrűség sugaras szerkezetű, és mivel a tükrözés során a félvégtelen lemezben az áramsűrűség eloszlása nem változik, ott a 9. ábrán látható árameloszlás alakul ki:

$$(4) \quad j(r) = \frac{2I}{2r\pi\delta} = \frac{I}{r\pi\delta}.$$



9. ábra

A végtelen síklemez esetéhez hasonlóan a félvégtelen lemez egy tetszőleges pontjának potenciálja

$$(5) \quad \Phi(r) = \frac{\rho I}{\pi\delta} \ln \frac{r_0}{r},$$

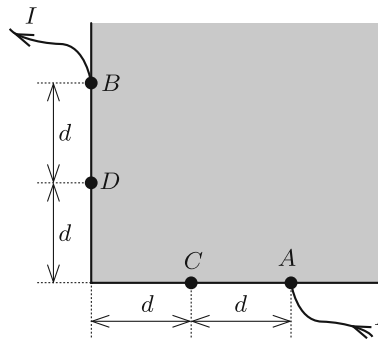
és ennek megfelelően két pont közötti potenciálkülönbség

$$(6) \quad U_{1,2} = \frac{\rho I}{\pi\delta} \ln \frac{r_1}{r_2}.$$

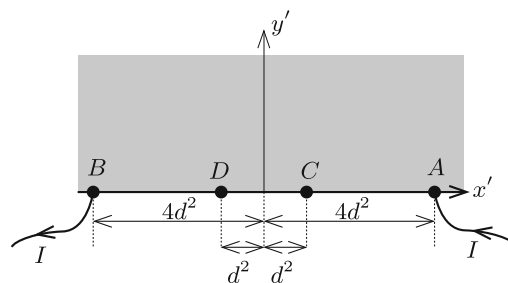
Derékszögű sarok

Határozzuk meg 10. ábrán látható, nagy kiterjedésű fémlemez derékszögű sarkánál lévő C és D pontok közötti feszültséget, ha az A pontba bevezett áramot a B pontban vezetjük el. A feladat tükrözelektródákkal történő megoldása megtalálható [1]-ben. Most azonban a transzformációs módszert fogjuk alkalmazni.

A vizsgálandó elrendezés egy legyező-leképezéssel ($n = 2$ -szeresére kinyitott legyezővel) átvihető egy végtelen félsíkba (11. ábra), ami tükrözéssel végtelen síklappá transzformálható. A derékszögű hajlat egyik szélé,



10. ábra



11. ábra

ami az x tengely mentén fekszik, a vele párhuzamos x' tengelybe transzformálódik, de a rajta fekvő C és A pontok az origótól nem d és $2d$ távolságra, hanem rendre d^2 és $4d^2$ távolságra kerülnek. A másik, y tengely mentén lévő oldal a leképezés után a $-x'$ tengelyre kerül, és a rajta elhelyezkedő D és B pontok az origótól rendre d^2 és $4d^2$ távolságra lesznek. Mivel eredetileg az áram be- és kimeneti pontjai a lemez szélein vannak, ezért a (6) egyenletet kell használnunk. Először csak a bemenő áram hatását vizsgáljuk, majd a kimenő áramét ellentétes előjellel, és a két eset szuperpozíciójával kapjuk meg a végeredményt. A feszültség nagysága:

$$U_{CD} = \left| \frac{\rho I}{\pi \delta} \ln \frac{3d^2}{5d^2} - \frac{\rho I}{\pi \delta} \ln \frac{5d^2}{3d^2} \right| = \frac{2\rho I}{\pi \delta} \ln \frac{5}{3}.$$

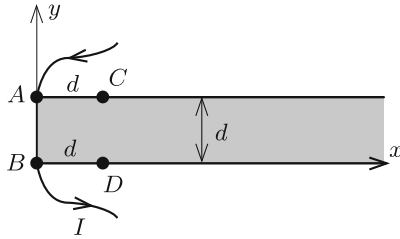
Az eredmény megegyezik az [1]-ben meghatározottal.

A $\varphi \rightarrow n\varphi$ és $r \rightarrow r^n$ ($n \neq 0$) általánosított legyező-leképezést felhasználhatjuk π/n szögű sarokkal rendelkező, nagy méretű lemezbe vezetett áramok esetén. Ilyenkor a csúcsos szöglet félvégteles síkba megy át. Akkor is jól használható a legyező-leképezés, ha egy nagy méretű, de vékony lemezből kialakított kúp palástjába vezetünk áramot, hiszen az áram bevezetési pontjával szemkötti alkotó mentén felvágva a kúp palástját és kiterítve azt, egy sík lemezsarkot kapunk. A felvágott palást újonnan keletkezett két határvonalán nem folyhat át áram, éppen úgy, mint – a szimmetria miatt – a felvágatlan kúppalást megfelelő alkotóján sem folyt át áram eredetileg.

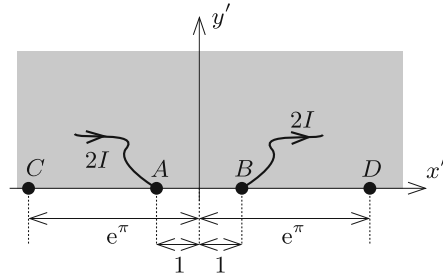
Félvégteles szalag

A 12. ábrán látható, $x - y$ síkban elhelyezkedő, d szélességű, félvégteles szalag A csúcsába I erősségű áramot vezetünk be, a B csúcsából pedig elvezetjük azt. Határozzuk meg, mekkora lesz a feszültség a csúcsoktól d távolságban lévő C és D pontok között!

Tükrözzük először a szalagot az y -tengelyre, hogy félvégteles helyett a $-\infty < x < +\infty$ abszcisszákkal jellemzett, mindkét irányban végtelen szalagot kapjunk. Ez együtt jár azzal, hogy az A pontban $2I$ erősségű áramot vezetünk be, és a B pontból pedig $2I$ -t vezetünk ki. Ezzel az áramvonal-eloszlás az eredeti szalagban nem változik meg. Célunk az, hogy a szalag pontjai a leképezés után az $x' - y'$ koordinátarendszer $y' \geq 0$ félsíkjában helyezkedjenek el, azaz az egyes pontok koordinátái $x' = r' \cos \varphi'$, $y' = r' \sin \varphi'$ legyenek, ahol $r' \in [0; \infty[$ az origótól mért távolság, $\varphi' \in [0; \pi]$ a helyvektor és a pozitív x' tengely által bezárt szög. A tükrözött szalag egyes pontjainak koordinátái a leképezés előtt: $x \in]-\infty; \infty[$ és $y \in [0; d]$.



12. ábra



13. ábra

A megfelelő leképezés két lépésben valósítható meg. Alkalmazzunk először egy $\lambda = \pi/d$ léptékű nyújtást, ekkor a szalag szélessége π -re változik, majd alkalmazzuk a szalag-leképezést!

Az áram be- és kivezetési, illetve a feszültségmérés pontjainak transzformációja:

$$\begin{aligned} A: & (x = 0, y = d) \Rightarrow (x = 0, y = \pi) \Rightarrow (r = 1, \varphi = \pi), \\ B: & (x = 0, y = 0) \Rightarrow (x = 0, y = 0) \Rightarrow (r = 1, \varphi = 0), \\ C: & (x = d, y = d) \Rightarrow (x = \pi, y = \pi) \Rightarrow (r = e^\pi, \varphi = \pi), \\ D: & (x = d, y = 0) \Rightarrow (x = \pi, y = 0) \Rightarrow (r = e^\pi, \varphi = 0). \end{aligned}$$

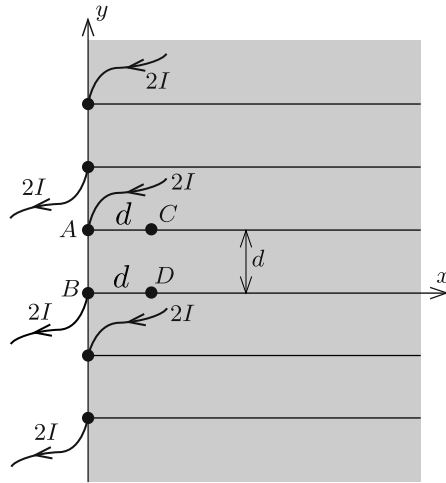
A leképezés utáni helyzetet a 13. ábra mutatja.

A C és D pontok közötti feszültséget a derékszögű hajlatnál látottak szerint számíthatjuk ki:

$$U_{CD} = \left| \frac{2\rho I}{\pi \delta} \ln \frac{e^\pi - 1}{e^\pi + 1} - \frac{2\rho I}{\pi \delta} \ln \frac{e^\pi + 1}{e^\pi - 1} \right| = \frac{4\rho I}{\pi \delta} \ln \frac{e^\pi + 1}{e^\pi - 1} \approx 0,0865 \cdot \frac{4\rho I}{\pi \delta}.$$

A feladat megoldható tükrözéssel is. Ha a szalagot az x tengellyel párhuzamos oldalaira tükrözzük addig, ameddig az első és a negyedik síknegyed teljesen le nem fedjük, akkor eljutunk a félvégteles lemez problémájához (lásd

a 14. ábrát). Mivel az elektródákat is tükrözzük, ezért a megfelelő helyeken (végtelen sok különböző pontban) $2I$ áram folyik be és $2I$ folyik ki. Ezek alapján (6) felhasználásával megkaphatjuk, hogy a C és D pontok közötti feszültség nagysága



14. ábra

$$U_{CD} = \left| \frac{2\varrho I}{\pi\delta} \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{(1 + (2n)^2)(1 + 4(n-1)^2)}{(1 + (2n-1)^2)^2} \right|.$$

A fenti összeg kiszámítása meglehetősen nehéz feladat. A WolframAlpha segítségével közelítőleg 0,173 adódik, amivel a feszültségre az előző (leképezéses) módszerrel kapott eredménnyel egyező kifejezést kapjuk.

Egy Eötvös-verseny feladat

A 2016-os Eötvös-verseny 3. feladata egy síkbeli vezetési jelenséggel foglalkozik:

*Egy R sugarú, d vastagságú ($\delta \ll R$), fajlagos ellenállású fémkorong A pontjába I erősségű áramot vezetünk, B pontjából pedig elvezetjük azt. Mekkora feszültség mérhető a 15. ábrán látható C és D pontok között?*³

A fémkorong határának egyenlete síkbeli polárkoordinátákkal kifejezve: $r(\varphi) = 2R \cos \varphi$. Alkalmazzunk a korongra egy általánosított legyező-transzformációt $n = -1$ szögnyújtási faktorról, vagyis legyen

$$\varphi' = -\varphi, \quad r' = \frac{1}{r}.$$

A derékszögű koordináták közötti kapcsolat:

$$x' = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad y' = -\frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Ennek megfelelően a lemezt határoló körvonal képe a leképezés után:

$$x' = r' \cos \varphi' = \frac{1}{r(\varphi)} \cos \varphi \equiv \frac{1}{2R}, \quad y' = r' \sin \varphi' = -\frac{1}{r(\varphi)} \sin \varphi \equiv -\frac{1}{2R} \operatorname{tg} \varphi.$$

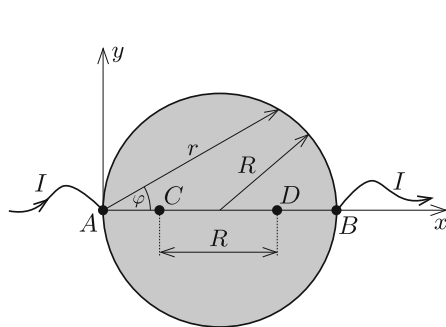
Látható, hogy a megadott leképezés a fémkorongot az $x' \geq \frac{1}{2R}$ félvégtelen síklapba transzformálja (16. ábra), és a transzformációs összefüggésekből a kérdéses pontok koordinátáit is könnyen leolvashatjuk. A versenyfeladat megoldása tehát

$$U_{CD} = \frac{\varrho I}{\pi\delta} \ln \frac{BC}{BD} = \frac{\varrho I}{\pi\delta} \ln \frac{\frac{2}{R} - \frac{1}{2R}}{\frac{2}{3R} - \frac{1}{2R}} = \frac{\varrho I}{\pi\delta} \ln 9 = \frac{2\varrho I}{\pi\delta} \ln 3,$$

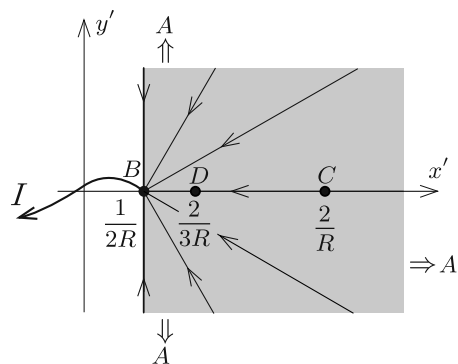
egyezésben a [2]-ben meghatározott eredménnyel.

Egy gyakorlófeladat

³ A feladat eredeti szövegét, jelöléseit kicsit megváltoztattuk, hogy a probléma a cikkben leírtakkal könnyebben összehasonlítható legyen.



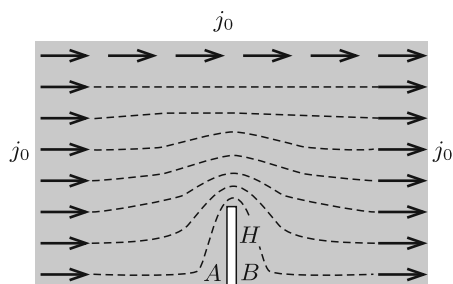
15. ábra



16. ábra

Befejezésül egy olyan feladatot ismertetünk (megoldás nélkül), amelyen ellenőrizhetik az Olvasók, hogy mennyire értették meg a leírtakat, és önállóan tudják-e alkalmazni a bemutatott leképezési módszereket.

Egy végtelen félsík a határvonalára merőlegesen H magasságú „bemetszést” tartalmaz. (A bemetszés szélessége és a lemez δ vastagsága sokkal kisebb H -nál.) A bemetszéstől nagyon távol a vezető lemezben az egyenes határvonallal párhuzamosan j_0 áramsűrűségű áram folyik (17. ábra). Mekkora a lemez anyagának fajlagos ellenállása, ha az A és B pontok között U_0 feszültséget mérhetünk?



17. ábra

Útmutatás: Próbáljuk az elektromos áramlási képet legyező-leképezés(ek) és eltolás egymás utáni alkalmazásával olyan árameloszlásba transzformálni, amelynek $\Phi(r)$ potenciálját jól ismerjük!

Köszönetnyilvánítás és hivatkozások

Az egyik szerző (E. P.) szeretne köszönetet mondani tanárának, *Tófalusi Péternek*, valamint *Vigh Máténak* a cikk megírásában nyújtott segítségükért.

Hivatkozások:

- [1] Gnädig P., Honyek Gy., Vigh M.: *333+ furfangos feladat fizikából*, 315. feladat, Typotex (2017).
- [2] Tichy G., Vankó P., Vigh M.: *Beszámoló a 2016. évi Eötvös-versenyéről*, KöMaL (2017/2), 105–112.

Elek Péter
Debreceni Ref. Koll.
Dóczy Gimn. 12. évf.

Szász Krisztián
BME Fizikai Intézet,
Budapest