Geometriai jegyzet.*)

A következőkben az a czélom, hogy elemi bizonyítását adjam a következő nagyon ismert tételnek:

Ha valamely változó hosszúságú AB egyenes A és B végpontjai egy szilárd xOy szög Ox és Oy szárain siklanak oly módon, hogy az OA és OB távolságok az $OA \times OB = m^2$ relácziót elégítik ki, az AB M középpontja egy hiperbolát ír le.

Jelelje az I betű az xOy szög felező egyenesének és az AOB háromszög körül írt körnek metszéspontját, I' a kör II' átmérőjének egyik végpontját és S az AB egyenes és az említett szögfelező egyenes metszéspontját.

A kör, melynek középpontja I' és mely az A és B pontokon megy keresztül, az OI egyenest messe az F és F' pontokban. E pontokra nézve

$$OF^2 = OF'^2 = OA \times OB = m^2$$

tehát az F és F' pontok szilárdak. Másrészt

$$OA \times OB = OI \times OS;$$

tehát

$$OF^2 = OF \times F'O = OI \times OS$$

s így tehát

$$(ISFF') = IF : SF :: IF' : SF' = -1,$$

azaz az F és F' pontok az IS távolságot harmonikusan osztják.**)

De ekkor az IM és SM sugarak az $F'MF$ szöget is harmonikusan osztják; s minthogy egymásra merőlegesek az MS az $F'MF$ szöget felezi.

Legyen K az F pont szimmetrikus pontja az MS tengelyre nézve és N az FK és MS metszéspontja; ekkor

$$MF' - MF = KF' = 2ON.$$

Azt állítom, hogy ON állandó.

Legyenek N, N', és H az F, F', és O projekcziói az MI egyenesre; akkor az (I) alatti egyenlőség, ha a benne foglalt hosszakat egy az AB egyenesre merőleges irányra vetítjük, a következőbe megy át:

$$(OH + NF)(F'N' - OH) = OH(OH + MI)$$

és ez, minthogy O az $F'F$ egyenes felező-pontja, a következőre redukálódik;

$$F'N' + NF = OH \cdot MI.$$

Minthogy az AOB háromszög területe állandó, (az $OA \times OB = m^2$ relácziónál fogva), azért

$$OH \times MB = const. = \lambda.$$

Az előbbi relázió tehát a következő alakot ölti:

$$F'N' + NF = \lambda \frac{MI}{MB}$$

De az $\dfrac{MI}{MB}$ hányados állandó, mert az ABI egyenlő $\frac{1}{2}xOy$-nal.

Ha most a N, N' és F' pontokon keresztül menő kört tekintetbe vesszük, látjuk, hogy:

$$FN \cdot F'N' = OF^2 - ON^2,$$

mi azt bizonyítja, hogy ON^2 állandó.

Tehát az M pont mértani helye hiperbola, melynek gyújtópontjai F és F'.

Rebuffel E.

*)"Journal de Mathématiques Élémentaires" publié par H. Vuiberrt 15-e année 1890-91. p 54.

**) Ugyanis:

$$IF = OF - OI, \qquad SF = OF - OS$$
$$IF' = OF' - OI, \qquad SF' = OF' - OS$$

tehát az

$$IF \cdot SF' + IF' \cdot SF = 0$$

egyenlőség a következőre vezet:

$$(OF - OI)(OF' - OS) + (OF' - OI)(OF - OS) = 0$$

miből

$$OF \cdot OF' - OI \cdot OF' - OF \cdot OS + OI \cdot OS +$$
$$+ OF \cdot OF' - OI \cdot OF - OF' \cdot OS + OI \cdot OS = 0$$

Minthogy

$$OF = FO' = -OF'$$

azért

$$OF \cdot F'O = OI \cdot OS$$