

## Egy tétel a paraboláról<sup>1</sup>.

Legyenek  $MT$ ,  $MT'$  az  $M$  pontból a parabolához vont érintők, melynek gyújtópontja  $F$ . Ekkor:

$$FM^2 = FT \cdot FT'$$

E relációt igazolhatjuk az analitikai geometria segítségével, ha koordinátáit tengelyekül választjuk a parabola szimmetriatengelyét és a csúcsponti érintőt. Az  $M(x_0, y_0)$  pontból a parabolához húzott érintők érintési pontjainak koordinátái meghatározhatók a következő egyenletekből:

$$y^2 - 2px = 0,$$

$$yy_0 - p(x + x_0) = 0.$$

Az érintési pontok abszcisszái tehát a következő egyenlet gyökei:

$$(p(x + x_0))^2 - 2py_0^2x = 0$$

vagy

$$p^2x^2 + 2p(px_0 - y_0^2)x + p^2x_0^2 = 0$$

Ha ez egyenlet gyökei  $x$  és  $x'$ , akkor

$$FT = x + \frac{p}{2}, \quad FT' = x' + \frac{p}{2},$$

és ennek folytán

$$FT \cdot FT' = xx' + \frac{p}{2}(x + x') + \frac{p^2}{4},$$

vagyis:

$$FT \cdot FT' = x_0^2 + \frac{p}{2} \cdot \frac{2(y_0^2 - px_0)}{p} + \frac{p^2}{4},$$

mely egyszerűsítve a következő alakot nyeri:

$$y_0^2 + \left(x_0 - \frac{p}{2}\right)^2;$$

e kifejezés az  $FM$  négyzetét ábrázolja.

A tétel a planimetria segítségével is bebizonyítható.

Húzzuk az  $MH$  egyenest, mely párhuzamos a parabola tengelyével s a mely  $FT'$ -et  $H$ -ban metszi.

Ismeretes, miszerint az  $FM$  felezi a  $TFT'$  szöveget és hogy az  $FMT$  és  $HMT'$  szögek egyenlők. De minthogy az érintő a  $T'$  pontban egyenlő szögeket alkot a tengellyel és az  $FT'$  vezérsugárral, a  $HMT'$  és  $MT'H$  szögek egyenlők; ennél fogva az  $FMT$  és  $FT'M$  háromszögek szögei rendre egyenlők s így ezen háromszögek hasonlók, miből következik, hogy.

$$\frac{FM}{FT} = \frac{FT'}{FM}$$

vagyis

$$FT \cdot FT' = \overline{FM}^2.$$

Ha tehát egy  $TFT'$  szög felező egyenesén választunk egy  $M$  pontot, melyre nézve  $FM$  az  $FT$  és  $FT'$  mértani középarányosa, akkor létezik egy parabola, melynek gyújtópontja  $F$  és mely érinti az  $MT$  egyenest  $T$  pontban, és az  $MT'$  egyenest  $T'$  pontban.

Ha az  $MF$  egyenesen egy  $M'$  pontot választunk, melyre nézve  $MF = FM'$ , egy második parabolát fogunk nyerni, melynek gyújtópontja szintén  $F$ , s mely az  $M'T$  és  $M'T'$  egyeneseket a  $T$  és  $T'$  pontokban érinti.

E két parabola különben megoldását képezi a következő feladatnak:

Meghatározandók azon parabolák, melyeknek gyújtópontja  $F$  és melyek a  $T$  és  $T'$  pontokon mennek keresztül.

E megjegyzésből könnyen levezethető a következő tétel, melyet Lemoine Emil, az "*Intermédiaire des Mathématiciens*" szerkesztője állított fel, s mely a következőképpen hangzik:

Ha egy ellipszis egy  $M$  pontjában, melynek gyújtópontjai  $F$  és  $F'$ , meghúzzuk a normálist s ezen két pontot választunk  $N$ -et és  $N'$ -et, melyekre nézve

$$\overline{MN}^2 = \overline{MN'}^2 = MF \cdot MF'$$

akkor az  $ONF'$  szög= $MNF$  szög és az  $ON'F' = MN'F$ .

Megjegyzendő, hogy miután:

$$MN^2 = MF \cdot MF'$$

és az  $NN'$  normális az  $FMF'$  szög felező egyenese, a parabolának mely az  $FN$  és  $F'N$  egyeneseket az  $F$  és  $F'$  pontokban érinti, gyújtópontja az  $M$  pont.

Mint hogy továbbá  $FM + F'M = 2a$ , ez utóbbi parabola vezérvonalának távolsága az ellipszis középpontjától  $O$ -tól egyenlő  $a$ -val; e vezérvonal érinti tehát az  $O$  pontból mint középponttól, az ellipszis nagy-tengelye mint átmérő körül leírt kört.

Lemoine tantételének bizonyítása a következőkben adatik.

Nevezzük  $m$  és  $m'$ -nek az  $NF$  és  $NF'$  egyenesek *auguláris-coefficienseit*; (az  $y = mx + n$  egyenletből)  $\mu$  és  $\mu'$ -nek az  $NM$  és  $NO$  egyenesekéit.

Hogy igazoljuk az  $MNF$  és  $F'NO$  szögek egyenlőségét, elegendő kimutatni a következő egyenlőség helyességét:

$$\frac{m - \mu}{1 + m\mu} = \frac{\mu' - m'}{1 + m'\mu'}$$

de ezen egyenlőség egyenértékű a következővel:

$$\frac{m + m'}{1 - mm'} = \frac{\mu + \mu'}{1 - \mu\mu'}$$

mely azt fejezi ki, hogy az  $FNF'$  és  $MNO$  szögeknek közös felező egyenesük van. A normális egyenlete az  $M(x_0, y_0)$  pontban:

$$\frac{x - x_0}{\frac{x_0}{a^2}} = \frac{y - y_0}{\frac{y_0}{b^2}}$$

Ha feltételezzük, hogy  $x$  és  $y$  az  $N$  pont koordinátái és  $b'$  az  $OM$  félátmérőnek megfelelő konjugált félátmérő  $b'$ , akkor:

$$\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4} = \frac{b'^2}{a^2b^2}$$

Tudjuk továbbá, hogy  $MF \cdot MF' = b'^2$ , így tehát az  $N$  pont koordinátáit az

$$\frac{x - x_0}{\frac{x_0}{a^2}} = \frac{y - y_0}{\frac{y_0}{b^2}} = \varepsilon ab \quad (\varepsilon = \pm 1)$$

egyenletek szolgáltatják. E koordináták a következők:

$$x = \frac{x_0}{a}(a + b\varepsilon)$$

$$y = \frac{y_0}{b}(a + b\varepsilon)$$

Tegyük fel, hogy az  $\varepsilon = +1$  az  $N$ , az  $\varepsilon = -1$  az  $N'$  pontot szolgáltatja.

Közvetlenül igazolható, miszerint

$$x^2 + y^2 = (a + b\varepsilon)^2$$

tehát

$$ON = (a + b) \quad \text{és} \quad ON' = (a - b).$$

Ezek után:

$$\mu = \frac{a^2 y_0}{b^2 x_0}, \quad \mu' = \frac{a y_0}{b x_0},$$

tehát

$$\frac{\mu + \mu'}{1 - \mu\mu'} = \frac{ab(a + b)x_0 y_0}{b^3 x_0^2 - a^3 y_0^2}$$

Másrészt:

$$\frac{m + m'}{1 - mm'} = \frac{2ab(a + b)x_0 y_0}{(a + b)(b^2 x_0^2 - a^2 y_0^2) - (a - b)a^2 b^2}$$

s így tehát csak azt kell kimutatni, hogy

$$2(b^3 x_0^2 - a^3 y_0^2) = (a + b)(b^2 x_0^2 - a^2 y_0^2) - (a - b)a^2 b^2$$

mi semminemű nehézségekkel sem jár.