Hogy az

$$S_p = 1^p + 2^p + 3^p + \ldots + n^p,$$

hatványösszeget képezhessük, néhány segédtételre van szükségünk, melyeket a következőkben levezetünk.

Jelentse $f(x)$ az

$$Ax^n + Bx^{n-1} + \ldots + Mx + N$$

alakú egész függvényét az x-nek. Jelentsék továbbá

$$f_0, \quad f_1, \ldots f_k \tag{1}$$

a függvény azon értékeit, melyeket ez felvesz, ha x helyébe az $x - 0$, $x_1, \ldots, x_k$ értékeket helyettesítjük.

Legyen

$$f_0' = f_1 - f_0, \quad f_1' = f_2 - f_1, \quad \ldots \quad f_{n-1}' = f_n - f_{n-1} \tag{2}$$

$$f_0" = f_1' - f_0', \quad f_1'' = f_2' - f_1', \quad \ldots \quad f_{n-2}'' = f_{n-1}' - f_{n-2}' \tag{3}$$

s általánosságban

$$f_0^k = f_1^{k-1} - f_0^{k_1} \tag{4}$$

A 2)-ből következik, hogy

$$f_1 = f_0 + f_0', \quad f_2 = f_1 + f_1', \quad \ldots, f_n = f_{n-1} + f_{n-1}' \tag{5}$$

ha 3)-at is tekintetbe vesszük, lesz:

$$f_2 = f_0 + 2f_0', + f_0^{"}, \quad f_3 = f_1 + 2f_1' + f_1^{"}$$

s általánosságban

$$f_k = f_0 + \binom{k}{1} f_0' + \binom{k}{2} f_0^{"} + \ldots + f_0^k \tag{6}$$

Hogy a 6) helyes, azt úgy bizonyítjuk, hogy megmutatjuk, miszerint helyes marad, ha k helyébe $k+1$-et írunk. Ugyanis

$$f_{k+1} = f_1 + \binom{k}{1} f_1' + \binom{k}{2} f_1^{"} + \ldots + f_1^k$$

$$f_{k+1} = (f_0 + f_0') + \binom{k}{1}(f_0' + f_0^{"}) + \binom{k}{2}(f_0^{"} + f_0^{'''}) + \ldots + f_0^k + f_0^{k+1}$$

$$f_{k+1} = f_0 + \left[1 + \binom{k}{1}\right] f^{'_0 + \left[\binom{k}{1} + \binom{k}{2}\right] f_0'' + \ldots + f_0^{k+1}}$$

mely egyenlet a következő alakban írható.

$$f_{k+1} = f_0 + \binom{k+1}{1} f_0' + \binom{k+1}{2} f_0^{"} + \ldots + f_0^{k+1}$$

a közismeretes

$$\binom{k+1}{r+1} = \binom{k}{r+1} + \binom{k}{r} \tag{7}$$

összefüggésnél fogva.

Legyen

$$f(x) = x^p, \quad \text{és}\, x_0 = 0, \quad x_1 = 1, \; ldots, \quad x_n = n$$

akkor a 6)-nál fogva:

$$x^p = f_0 + \frac{x}{1} f_0' + \frac{x(x-1)}{1 \cdot 2} f_0^{"} + \frac{x(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} f_0^{'''} + \cdots + \frac{x(x-1)\cdots(x-p+1)}{1 \cdot 2 \cdots p} f_0^p \tag{8}$$

s ha ezen egyenletbe fokozatosan $0, \; 1, \; 2, \; \ldots \; n$-et helyettesítünk s a nyert eredményeket összeadjuk, a következő eredményt kapjuk:

$$S_p = f_0' \sum_1^n \frac{x}{1} + f_0^{"} \sum_1^n \frac{x(x-1)}{1 \cdot 2} + \cdots + f_0^k \sum_1^n \frac{x(x-1)\cdots(x-p+1)}{1 \cdot 2 \cdots p} \tag{10}$$

De

$$\sum_1^n \frac{x}{1} = \binom{n+1}{2}, \quad \sum_1^n \frac{x(x-1)}{1\cdot 2} = \binom{n+1}{3}, \ \ldots, \ \sum_1^n \frac{x(x-1)\cdots(x-p+1)}{1\cdot 2\cdots p} = \binom{n+1}{p+1}$$

mely képletek igazságát a 7) alatti egyenlet segélyével bizonyítjuk.

Ugyanis

$$\begin{gathered}
\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p+1} + \binom{n}{p} \\
\binom{n}{p+1} = \binom{n-1}{p+1} + \binom{n-1}{p} \\
\binom{n-1}{p+1} = \binom{n-2}{p+1} + \binom{n-2}{p} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\binom{p+2}{p+1} = \binom{p+1}{p+1} + \binom{p+1}{p} \\
\binom{p+1}{p+1} = 1
\end{gathered}$$

s így tehát ez utóbbi egyenletek összeadása után

$$\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n-1}{p} + \binom{n-2}{p} + \cdots + \binom{p+1}{p} + 1 =$$

$$= \sum_1^n \binom{x}{p} = \sum_1^n \frac{x(x-1)\cdots(x-p+1)}{1\cdot 2\cdots p}.$$

Lesz tehát a keresett összeg végleges alakja a következő

$$\begin{aligned}
Sp = \frac{(n+1)n}{1\cdot 2} f_0' + \frac{(n+1)n(n-1)}{1\cdot 2\cdot 3} f_0'' + \cdots + \\
+ \frac{(n+1)n(n-1)\cdots(n-p+1)}{1\cdot 2\cdots(p+1)} f_0^p
\end{aligned} \qquad 11)$$

PÉLDÁK. - Legyen $p = 1$, akkor

$$\begin{aligned}
&f_0 = 0 \ f_1 = 1 \ f_2 = 2 \\
&f_0' = 1 \ f_1' = 1 \\
&f_0'' = 0
\end{aligned}$$

s így tehát

$$S_1 = \frac{(n+1)n}{1\cdot 2}$$

Ha $p = 2$, a következő táblázat készítendő

0 1 4 9
1 3 5
2 2
0

és így tehát

$$S_2 = \frac{(n+1)n}{1\cdot 2} + \frac{(n+1)n(n-1)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot 2 = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$$

Ha $p = 3$, képezzük a következő táblázatot

0	1	8	27	64
1	7	19	37	
6	12	18		
6	6			
0				

és így tehát

$$S_3 = \frac{n(n+1)n}{1\cdot 2} + \frac{(n+1)n(n-1)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot 6 + \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot 6$$

vagy továbbá

$$S_3 = \frac{n(n+1)}{1\cdot 2}\left[1 + 2(n-1) + \frac{(n-1)(n-2)}{2}\right]$$

vagy végre

$$S_3 = \frac{n(n+1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{n+n^2}{2} = \left[\frac{n(n+1)}{1\cdot 2}\right]^2.$$