

I. rész

1. Adjuk meg azon $P(x; y)$ pontok halmazát, amelyek koordinátáira teljesül:

a) $(x^2 - y^2)(x^2 + y^2 - 4) = 0$;

b) $(x^2 - y)^2 + (x^2 + y^2 - 14y + 36)^2 = 0$.

(11 pont)

2. A SzÁMADÓ és az ADÓSzÁM egy-egy olyan hatjegyű, a SzÁM és az ADÓ pedig egy-egy olyan háromjegyű szám, amelyben az Sz, Á, M, A, D és Ó betűk különböző pozitív számjegyek.

a) Mennyi a SzÁM + ADÓ összeg, ha SzÁMADÓ + ADÓSzÁM = 678 678?

b) Adjuk meg a SzÁMADÓ számot, ha még azt is tudjuk, hogy $Sz > A$, valamint $\overline{SzÁM} \cdot \overline{ADÓ} = 90\,585$.

c) Mennyi az ADÓSzÁM, ha $7 \cdot \overline{ADÓSzÁM} = 6 \cdot \overline{SzÁMADÓ}$?

(12 pont)

3. A Szép Utazások iroda tájékoztatójában a repülőgépen szállítható csomagokról ez olvasható:

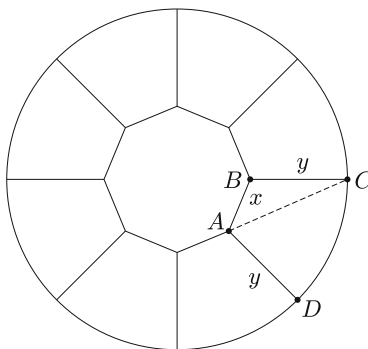
„Az iroda által bérelt járatokon 15 kg/fő feladott poggyász és 1 db 8 kg/fő kézipoggyász szállítása díjtalan, a többsúlyért fizetni kell. Mindegyik poggyásznak téglatest alakúnak kell lennie. A feladott poggyász egyik élhossza sem lehet több, mint 150 cm, és a három különböző irányú él hosszának összege nem haladhatja meg a 220 cm-t. A kézipoggyász maximális hossza 56 cm, maximális szélessége 45 cm, maximális mélysége 25 cm lehet, azonban a három méret összesen nem haladhatja meg a 115 cm-t.”

a) Bea kézipoggyásznak való kisbőröndöt vásárol az utazáshoz. A boltban a megfelelő bőröndök egyik élhossza 25 cm. Szeretné, ha az élhosszak összege a megengedett maximális, ugyanakkor a bőrönd felszíne 8500 cm² lenne. Milyen méretű bőrönd felelne meg ezeknek a feltételeknek?

b) László az utazáshoz bőröndöt szeretne vásárolni, amibe a feladható poggyászként engedélyezett 15 kg-ot bepakkolhatja. A neki tetsző bőröndök egyik élének hossza 40 cm volt. Milyen méretű bőröndöt válasszon ezek közül, ha szeretné, hogy a térfogata maximális legyen? Mekkora lesz ekkor a bőrönd térfogata?

(14 pont)

4. A Fővárosi Nagycirkusz 13 méter átmérőjű porondjának vázlatát mutatja az *ábra*. A vízi cirkuszi előadásban a porond kilenc, azonos területű része függőlegesen, le-föl mozgatható.



a) Mekkora a porond közepén látható szabályos nyolcszög területe?

b) A nyolc egybevágó (trapézszerű) síkidomot a könnyebb mozgatás miatt körben egy nagyon speciális anyaggal borították. Ehhez előzetesen meg kellett határozni ezeknek a síkidomoknak a kerületét. Mekkora a kerülete az $ABCD$ trapézszerű síkidomnak?

c) A nyolc egybevágó síkidom függőleges mozgatásához megépített szerkezet miatt minden ilyen síkidom alatt szükség volt egy átlós merevítőre. Adjunk képletet az AC merevítő hosszára az ábra x és y hosszúságú szakaszának ismeretében. (A képletben előforduló szögfüggvényértékek négy tizedes jegy pontossággal szerepeljenek.)

(14 pont)

II. rész

5. Rebeka új szemüveget vásárol, de nem szeretné, hogy a lencsékért 25 000 Ft-nál többet fizessen. A szaküzletben kiderül, hogy ha hagyományos lencsét vásárolna, akkor 4280 Ft-ot fizetne a két lencséért. Rebeka tudja, hogy a minőséget a különböző típusú bevonatok javíthatják, ezért tükröződésmentes és karcolás mentes bevonatot kér a lencsére. A bevonatok mindegyikének 99 Ft/cm² az ára. (A lencsék felületét síknak vehetjük.) Azt is eldöntötte, hogy a hagyományosnál vékonyabb lencsét szeretne választani. A készlet szerint ez lehet 10, 20, 30, 40, illetve 50%-kal vékonyabb. Ezeknek a lencséknek az ára a hagyományoshoz képest rendre 40, 80, 160, 320, 640%-kal drágább.

Egy lencse határvonalát az $f(x) = 2 - \frac{2}{25}x^2$ és a $g(x) = \frac{x^2}{5} - 5$ hozzárendeléssel megadott függvények grafikonja által meghatározott síkidom határvonalára adja. A koordinátarendszer egysége 5 mm-rel egyenlő. Mekkora területű részt foglal el egy lencse az asztalon? A hagyományos lencséhez képest hány százalékkal választhat vékonyabb lencsét Rebeka?

(16 pont)

6. A Rubik-kocka feltalálásának évfordulójára díszdobozos kiadást terveznek. Az egyik változat szerint legyen a doboz egy olyan négyoldalú szabályos gúla, amelynek alapéle ugyanolyan hosszú, mint az oldaléle. Az elképzelés szerint a kocka egyik lapja illeszkedik a gúla alaplapjára, az ezzel párhuzamos lap csúcsai pedig a gúla oldaléleire.

a) Mekkora legyen a doboz éleinek hossza, ha a Rubik-kocka élhosszúsága: $a = 5,7$ cm?

b) A sok-sok terv közül azonnal elvetették azokat, amelyeknél a játék a doboz 35%-át sem tölti ki. A fenti terv megfelelő-e ezen feltétel ismeretében? (16 pont)

7. a) A tízes számrendszerben felírt egyjegyű a , kétjegyű $\overline{ab}$ és háromjegyű $\overline{abb}$ szám ebben a sorrendben egy számtani sorozat első, második és tizenkettedik tagja. (Azonos betűk azonos, különböző betűk különböző számjegyeket jelölnek.) Hány darab megfelelő kétjegyű szám van? Mennyi a legnagyobb megfelelő kétjegyű szám esetén a számtani sorozat első 20 tagjának összege?

b) A pozitív számokból álló (a_n) mértani sorozat kilenc egymást követő tagjából képezzünk három számot úgy, hogy összeadjuk az első hármat, aztán a következő hármat, és végül az utolsó hármat. Mutassuk meg, hogy az így kapott három szám tízes alapú logaritmusai egy számtani sorozat három egymást követő tagja lesz. (16 pont)

8. Az $ABCDEFGH$ téglatestben úgy jelöltük a csúcsoakat, hogy az $ABCD$ alaplapra az AE , BF , CG és DH élek merőlegesek. Tudjuk, hogy a HAD szög 30° -os, a FAB szög pedig 60° -os.

a) Mekkora az AFH háromszög területe, ha a téglatest térfogata 3375 cm³?

b) Mekkora szögben hajlik a téglatest AG testátlója az $ABCD$ laphoz?

c) Dávid a téglatest ábráját a 8 csúccsal, a 12 élével és az AH , valamint AF éllel egy gráfnak tekinti. Barbara pedig a hiányzó élek berajzolásával készített egy teljes gráfot. Azt állítja, hogy rajzolás közben minden csúcsot érintett, viszont egy élt csak egyszer rajzolt meg, és közben a ceruzáját nem kellett felemelnie a papírról. Miért tartjuk ezt hihetőnek? Melyik csúcsból kezdhette a rajzolást, és melyik csúcsba érkezhett? (16 pont)

9. Legyen n pozitív egész szám. Adottak az alábbi sorozatok:

$$\begin{aligned} \{a_n\} &= \{\lg(n+1)\}; \\ \{b_n\} &= \left\{ \frac{n^3 - 5n^2 - n + 5}{n+1} \right\}; \\ \{c_n\} &= \{|n+2| + |n-6|\}. \end{aligned}$$

Válaszoljunk (indoklással) mindhárom esetben, hogy a sorozat alulról, felülről korlátos vagy nem, illetve monoton vagy nem. Ha van, adjunk meg egy alsó, illetve felső korlátot. (16 pont)