

A hagyományoknak megfelelően ebben az évben is közöljük a nyári matematikai diákolimpia feladatainak a megoldásait; lényegében úgy, ahogyan a legilletékesebbek, a magyar csapat tagjai leírták. Közreműködésüket köszönjük és ezúton is gratulálunk eredményeikhez.

**A szerkesztőség**

### Első nap<sup>1</sup>

**1.** Legyen  $\Gamma$  a hegyesszögű  $ABC$  háromszög körülírt köre.  $D$  és  $E$  legyenek az  $AB$ , illetve  $AC$  szakaszok olyan pontjai, amelyekre  $AD = AE$ . A  $BD$  és  $CE$  szakaszok felezőmerőlegesei a  $\Gamma$  kör rövidebb  $AB$ , illetve  $AC$  íveit az  $F$ , illetve  $G$  pontokban metszik. Bizonyítsuk be, hogy a  $DE$  és  $FG$  egyenesek párhuzamosak vagy egybeesnek.

**Imolay András megoldása.** Messe az  $FD$  és a  $GE$  egyenes  $\Gamma$ -t másodszor rendre  $M$ -ben és  $N$ -ben.

$F$  rajta van  $BD$  felezőmerőlegésén, így az  $FDB$  háromszög egyenlőszárú,  $FDB \sphericalangle$  és  $ADM \sphericalangle$  csúcshökök, és  $BFAM$  húrnégyszög, így

$$\begin{aligned} ADM \sphericalangle &= FDB \sphericalangle = FBD \sphericalangle = \\ &= FBA \sphericalangle = FMA \sphericalangle = DMA \sphericalangle, \end{aligned}$$

tehát a  $DAM$  háromszög egyenlőszárú, így  $AD = AM$ . Hasonlóan kapjuk, hogy  $AE = AN$ , és a feladat feltétele szerint  $AD = AE$ , így  $AN = AD = AE = AM$ , tehát az  $N$ ,  $D$ ,  $E$ ,  $M$  pontok egy  $A$  középpontú körre illeszkednek.

$NDEM$  és  $GMNF$  húrnégyszögek, így

$$MDE \sphericalangle = MNE \sphericalangle = MNG \sphericalangle = MFG \sphericalangle,$$

tehát a  $DE$  és  $FG$  egyenesek az  $FM$  egyenessel ugyanakkora szöget zárnak be, vagyis a  $DE$  és  $FG$  egyenesek párhuzamosak vagy egybeesnek. Kész vagyunk.

**2.** Határozzuk meg azokat az  $n \geq 3$  egész számokat, amelyekre léteznek  $a_1, a_2, \dots, a_{n+2}$  valós számok, amelyekre  $a_{n+1} = a_1$ ,  $a_{n+2} = a_2$  és

$$a_i a_{i+1} + 1 = a_{i+2}$$

teljesül minden  $i = 1, 2, \dots, n$  esetén.

**Bukva Balázs megoldása.** Ha  $3 \mid n$ , akkor van megoldás, méghozzá legyen

$$a_n = \begin{cases} 2 & n \equiv 0 \pmod{3}, \\ -1 & n \equiv 1 \pmod{3}, \\ -1 & n \equiv 2 \pmod{3}. \end{cases}$$

Ez könnyen ellenőrizhető, hogy jó lesz.

Más esetben nincsen megoldás. Tekintsük az alábbi átrendezést ( $a_{n+3} := a_3$ ):

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n a_i a_{i+3} &= \sum_{i=1}^n a_i (a_{i+1} a_{i+2} + 1) = \sum_{i=1}^n a_i a_{i+1} a_{i+2} + \sum_{i=1}^n a_i = \\ &= \sum_{i=1}^n a_i a_{i+1} a_{i+2} + \sum_{i=1}^n a_{i+2} = \sum_{i=1}^n (a_i a_{i+1} + 1) a_{i+2} = \sum_{i=1}^n a_{i+2}^2. \end{aligned}$$

Ebből a rendezési egyenlőtlenség alapján azt kapjuk, hogy  $a_{i+3} = a_i$  minden  $i$ -re, így, ha  $(n, 3) = 1$ , akkor az összes  $a_i$  egyenlő, azaz  $a_i = a$  valamilyen  $a$ -ra. De ebből az következne, hogy az  $x^2 + 1 = x$  egyenletnek  $a$  egy valós megoldása, de ennek a másodfokú egyenletnek nincs valós megoldása. Ezzel beláttuk, hogy ha  $(n, 3) = 1$ , akkor nincs megoldás.

**3.** Nevezzük anti-Pascal háromszögnak számoknak egy olyan, szabályos háromszög alakú elrendezését, amelyben az utolsó sorbeli számok kivételével minden szám a közvetlenül alatta lévő két szám különbségének az abszolút értékével egyenlő.

Alább látható egy példa egy olyan anti-Pascal háromszögre, amelynek 4 sora van, és 1-től 10-ig minden egész szám előfordul benne.

$$\begin{array}{cccc} & & 4 & \\ & 2 & & 6 \\ & 5 & 7 & 1 \\ 8 & 3 & 10 & 9 \end{array}$$

Létezik-e olyan anti-Pascal háromszög, aminek 2018 sora van, és 1-től  $(1 + 2 + \dots + 2018)$ -ig minden egész szám előfordul benne?

<sup>1</sup>A második nap feladatainak megoldását a novemberi számban közöljük.

**Janzer Orsolya Lili megoldása.** Tegyük fel, hogy van ilyen háromszög.

Mivel egy ilyen, 2018 soros háromszögnek éppen  $1 + 2 + 3 + \dots + 2018$  mezője van, minden egésznek 1-től  $1 + 2 + 3 + \dots + 2018$ -ig pontosan egyszer kellene szerepelnie benne.

Legyen az  $n$ -edik sorban  $M_n$  a legnagyobb,  $m_n$  pedig a legkisebb szám. Most tegyük fel, hogy  $n \leq 2017$ , és vegyük a közvetlenül  $M_n$  alatt lévő számokat. Legyenek ezek a számok  $a$  és  $b$ . Feltehető, hogy ezek közül  $a > b$ . Így  $a - b = M_n$ . Mivel  $a \leq M_{n+1}$  és  $b \geq m_{n+1}$ , kapjuk, hogy  $M_{n+1} \geq M_n + m_{n+1}$  ( $\geq M_{n-1} + m_n + m_{n+1} \geq \dots$ ).

Így minden  $1 \leq i < j \leq 2018$ -ra

$$M_j \geq M_i + \sum_{k=i+1}^j m_k.$$

Ebből, mivel  $M_1 = m_1$ ,

$$M_{2018} \geq \sum_{k=1}^{2018} m_k.$$

Tehát  $M_{2018}$  felírható 2018 különböző pozitív egész összegeként, így  $M_{2018} \geq 1 + 2 + 3 + \dots + 2018$ , ezért  $M_{2018} = 1 + 2 + 3 + \dots + 2018$ , és  $\{m_1, m_2, \dots, m_{2018}\}$  egy permutációja az  $\{1, 2, \dots, 2018\}$  számoknak. Következik továbbá, hogy minden egyenlőtlenség egyenlőséggel teljesül, azaz minden  $1 \leq j \leq 2018$  esetén

$$M_j = \sum_{k=1}^j m_k.$$

Most legyen minden  $n \leq 2018$  szám „kicsi”, továbbá minden  $1 + 2 + \dots + 2017 \leq n \leq 1 + 2 + \dots + 2018$  szám „nagy”. Mivel  $\{m_1, m_2, \dots, m_{2018}\}$  az  $\{1, 2, \dots, 2018\}$  számok permutációja, minden sorban pontosan egy kicsi szám lesz.

Ha  $n \leq 1954$ , akkor:

$$\begin{aligned} M_n &= \sum_{k=1}^n m_k \leq 2018 + 2017 + \dots + 65 = \\ &= (1 + 2 + \dots + 2018) - (1 + 2 + \dots + 64) = \\ &= (1 + 2 + \dots + 2018) - 2080 < 1 + 2 + \dots + 2017, \end{aligned}$$

vagyis az  $n$ -edik sorban nem lehet egyetlen „nagy” szám sem.

Ha  $1955 \leq n \leq 2017$ , akkor legyen  $l$  egy nagy szám az  $n$ -edik sorban. Legyenek a számok közvetlenül  $l$  alatt  $a$  és  $b$ ; feltehető, hogy  $a > b$ . Így  $b = a - l$ , és  $a \leq 1 + 2 + \dots + 2018$ ; mivel  $l$  „nagy” ( $\Rightarrow l \geq 1 + 2 + \dots + 2017$ ),  $b \leq 2018$ , vagyis  $b$  kicsi. Így  $b = m_{n+1}$ , azaz  $l$  közvetlenül  $m_{n+1}$  fölött van. Így legfeljebb kettő „nagy” szám lehet az  $n$ -edik sorban.

Tehát legfeljebb 126 nagy szám van a sorokban összesen, a legalsót kivéve. Mivel összesen 2019 „nagy” szám van, legalább 1893 „nagy” szám van a legalsó sorban, ezért legfeljebb 125 „nem-nagy” van abban a sorban. A legalsó sorban 2018 szám, így 2017 szomszédos számpár van. Ha figyelmen kívül hagyjuk a közvetlenül az  $m_{2017}$  alatti számpárt, és a legfeljebb 250 számpárt, amiben van „nem-nagy”, akkor még mindig marad olyan szomszédos pár, aminek mindkét tagja „nagy”, és nem közvetlenül az  $m_{2017}$  alatt van. Viszont a két „nagy” szám különbsége kicsi, és megtalálható a 2017-edik sorban, így az  $m_{2017}$ -tel együtt már kettő „kicsi” szám is lenne abban a sorban, ami ellentmondás.

Tehát nem létezik ilyen anti-Pascal háromszög.

A megoldás forrása: <https://artofproblemsolving.com>.