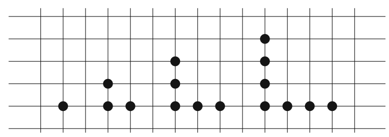
Barangolás kockás papíron

Szeretjük, ha egy számsorozat általános tagja megadható képlettel. Például a páratlan számok, a páros számok, a háromszögszámok, a négyzetszámok előállítására gyorsan tudunk képletet adni. A számok megjelenítése egy-egy megfelelő figurával sokat segíthet a képlet előállításában. A figurális számokat régen egyforma kavicsokkal ábrázolták, ma kirakhatjuk őket például színes kupakokból.

A „kockás papír” négyzetrácsán is szemléltethetők ezek a számok.

Az n-edik páratlan szám:

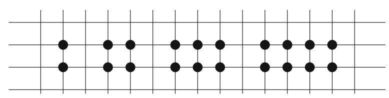
$$a_n = n + (n-1) = 2n - 1.$$



1 3 5 7 ...

Az n-edik páros szám:

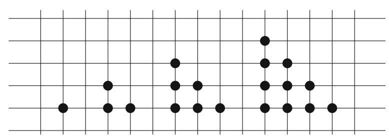
$$a_n = 2n.$$



2 4 6 8 ...

Az n-edik háromszögszám:

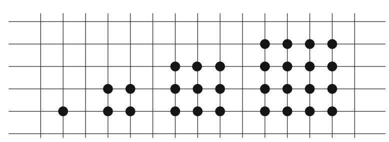
$$a_n = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$



1 3 6 10 ...

Az n-edik négyzetszám:

$$a_n = n^2.$$



1 4 9 16 ...

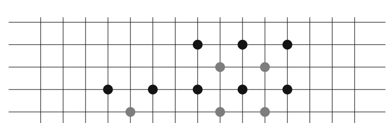
Milyen képlettel tudnánk megadni a következő számsorozat n-edik tagját?

(1) $$1,\ 5,\ 13,\ 25,\ 41,\ 61,\ 85,\ 113,\ 145,\ 181,\ 221,\ 265,\ \ldots .$$

Ha két szomszédos négyzetszám figuráját egymásra illesztjük, azonnal láthatóvá válik a képlet.

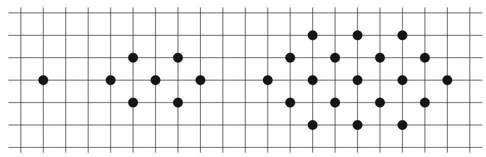
Vagyis a sorozat n-edik tagja:

(2) $$a_n = n^2 + (n-1)^2.$$



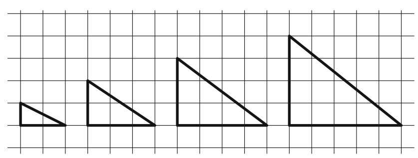
1 5 13 ...

Az (1) sorozat számait látva érthetetlen lett volna, ha négyzetszámoknak nevezzük ezeket. Az ábrákat szemlélve viszont jogosnak érezhetnénk, de ez az elnevezés már foglalt. Mivel a négyzetszámok megszokott ábráján minden kis négyzetnek a közepét is bejelöltük, ezért ezeket a számokat középpontos négyzetszámoknak nevezi a szakirodalom. A középpontos négyzetszámok szemléltetésénél észrevehető az is, hogy egy pont van középen, és azt négyzet alakú pontrétegek veszik körül. Adott réteg minden oldala eggyel több pontot tartalmaz, mint a korábbi réteg. Ezt felhasználva bevezethetjük a középpontos sokszögszámok fogalmát is. Az *ábrán* példaként a középpontos hatszögszámok sorozatát szemléltetjük kockás papíron.



1 7 19 ...

A (2) képlet eszünkbe juttathatja a Pitagorasz-tételt. Tekintsük azokat a derékszögű háromszögeket, amelyekben a két befogó hossza két egymást követő egész számmal adható meg:



Az így kapott n-edik derékszögű háromszög átfogójának hosszát az $n+1$. középpontos négyzetszám négyzetgyöke adja: $c_n = \sqrt{(n+1)^2 + n^2}$. Az ábrasorozat harmadik tagja a jól ismert 3, 4, 5 oldalhosszúságokkal megadott Pitagorasz-féle háromszög.

Van-e még a sorozatban Pitagorasz-féle háromszög? A kérdésre az $(n+1)^2 + n^2 = c^2$ másodfokú diofantoszi egyenlet megoldása adja a választ. Ezekkel a kérdésekkel tanórán is foglalkoztunk, de az ilyen típusú egyenletek megoldása nem szerepel a középiskolai tananyagban, ezért függvénytáblázat, számológép, illetve számítógép segítségével próbáltak a diákjaink ilyen háromszögeket keresni.

A függvénytáblázatban a $c < 100$-hoz megtaláljuk a Pitagorasz-féle számhármasokat. Ezek között csak egy további megfelelő van: 20, 21, 29. Grafikus számológéppel további számhármasokat is kaptunk. A számológép táblázatának első oszlopában az n, a második oszlopában a $\sqrt{(n+1)^2 + n^2}$ értékeit írattuk ki. Így a $c < 1000$-hez találtunk még két megfelelő háromszöget: 119, 120, 169, illetve 696, 697, 985.

Óvatosan kell kezelnünk a számológép táblázatának számait. A számológép például a 288, 289, 408 számhármast is megadta, de ez nyilvánvalóan rossz, hiszen a $288^2 + 289^2$ utolsó számjegye 5, míg 408^2 utolsó számjegye 4. A táblázat számait két tizedesre kerekítve a gép 408-nak vette a $\sqrt{288^2 + 289^2} \approx 408{,}001$ -et.

Szondy Dániel számítógéppel a $c < 225\,058\,682$ feltétel mellett összesen 11 számhármast talált:

	a_n	b_n	c_n
1.	3	4	5
2.	20	21	29
3.	119	120	169
4.	696	697	985
5.	4 059	4 060	5 741
6.	23 660	23 661	33 461
7.	137 903	137 904	195 025
8.	803 760	803 761	1 136 689
9.	4 684 659	4 684 660	6 625 109
10.	27 304 196	27 304 197	38 613 965
11.	159 140 519	159 140 520	225 058 681

Ezeket egyszerű ”favágó” módszerrel kereste, ezért kijelenthetjük, hogy eddig teljes a lista. Az ennél nagyobb számok keresése előtt egy érdekességet vett észre. Megfigyelte, hogy az első oszlopban a két egymás után következő szám hányadosa 5,83 körüli értéket vesz fel. Ezen érdekesség alapján elkészített egy új keresési algoritmust:

(3)
A legnagyobb ismert ilyen a_n értéket (azaz a háromszög legrövidebb oldalának hosszát)szorozzuk meg az utolsó két szám hányados

Vagyis az új derékszögű háromszög legkisebb oldalának hosszát $\left[\frac{a_n^2}{a_{n-1}}\right]$ környékére várjuk. Ez a sejtés sikeresnek mondható, mert ilyen módon jelentős mennyiségű új számhármas adódott, de már nem lehetünk biztosak listánk teljességében:

	a_n	b_n	c_n
12.	927 538 920	927 538 921	1 311 738 121
13.	5 406 093 003	5 406 093 004	7 645 370 045
14.	31 509 019 100	31 509 019 101	44 560 482 149
15.	183 648 021 599	183 648 021 600	259 717 522 849
16.	1 070 379 110 496	1 070 379 110 497	1 513 744 654 945
17.	6 238 626 641 379	6 238 626 641 380	8 822 750 406 821
18.	36 361 380 737 780	36 361 380 737 781	51 422 757 785 981
19.	211 929 657 785 303	211 929 657 785 304	299 713 796 309 065
20.	1 235 216 565 974 040	1 235 216 565 974 041	1 746 860 020 068 409

Mi lehet az a titokzatos 5,83 körüli szám?

A megtalált húsz derékszögű háromszög két befogója majdnem egyenlő hosszúságú. Minél nagyobb sorszámú háromszögeket nézünk a sorozatból, annál jobban az egyenlőszárú derékszögű háromszögeket juttatják az eszünkbe, amelyekben a befogó hosszának $\sqrt{2}$-szöröse adja az átfogó hosszát. Ez adhatta azt a megérzést, hogy az 5,83 és a $\sqrt{2}$ között keressünk kapcsolatot. Mivel $2\sqrt{2}+3 \approx 5{,}8284$, ezért az $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 2\sqrt{2}+3$ sejtést is megfogalmaztuk. A fenti majdnem egyenlőszárú derékszögű háromszögeket a továbbiakban röviden MED háromszögeknek fogjuk nevezni.

Az eddigi oldalhosszakat nézve rekurzív képletet is találtunk:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 6a_n - a_{n-1} + 2, \\ b_{n+1} &= 6b_n - b_{n-1} - 2, \\ c_{n+1} &= 6c_n - c_{n-1}. \end{aligned}$$

Próbáltunk a Fibonacci-sorozathoz hasonló explicit képletet adni az a_n-re. A kísérletezgetések alapján igaznak tűnik a következő képlet:

$$\frac{\left(3+2\sqrt{2}\,\right)^n - \left(3-2\sqrt{2}\,\right)^n}{\sqrt{2}} = a_n + a_{n-1} + 1, \tag{4}$$

ahol 1-nél nagyobb egész szám az n. Ez egy szép sejtés, de nem az a_n-re várt képlet.

Ezek után utánanéztünk az interneten, hogy vajon mások is foglalkoztak-e már a MED háromszögekkel, s ha igen, akkor ők mire jutottak. Nem meglepő módon igen sok találatot kaptunk, a kérdésnek gazdag irodalma van. Sok érdekességre is bukkantunk, ezek közül – a teljesség igénye nélkül – itt csak néhányat említünk. Az [1]-ben például találunk egy bizonyítást arra, hogy végtelen sok ilyen háromszög van, és egy konstrukciót is kapunk ilyenek előállítására. Az azonban nem derül ki ebből a bizonyításból, hogy az így konstruálható háromszögeken kívül is vannak-e MED háromszögek.

A [2]-ben találunk egy rövid bizonyítást arra nézve, hogy végtelen sok olyan háromszögszám van, amely egyben négyzetszám is. Könnyű ellenőrizni, hogy ha $H(n) = \frac{n(n+1)}{2}$ (tehát az n-edik háromszögszám) négyzetszám, akkor $H\big(4n(n+1)\big)$ is az. Ez a konstrukció nem adja meg az összes ilyen tulajdonságú számot, viszont a [3]-ban olvasható egy bizonyítás, ami megadja az összest. A [4] szerint pedig Euler 1778-ban általános formulát talált az E_k-ra, azaz a k-adik háromszögszám-négyzetszámra:

$$E_k = \left(\frac{\left(3+2\sqrt{2}\,\right)^k - \left(3-2\sqrt{2}\,\right)^k}{4\sqrt{2}}\right)^2.$$

Ezt azért tartjuk érdekesnek, mert nagyon hasonlít az $a_n+a_{n-1}+1$-re általunk talált (4) összefüggésre. Kis átrendezéssel kapjuk, hogy $a_n + a_{n-1} + 1 = 4\sqrt{E_k}$.

A [2] egyik állítása háromszögszám-négyzetszámok és a MED háromszögek közti szoros kapcsolatot is igazolja.

Állítás: Végtelen sok MED háromszög van, s ezek oldalhosszúságainak általános alakja:

$$\left(\frac{4\sqrt{E_k}-1+\sqrt{8E_k+1}}{2};\ \frac{4\sqrt{E_k}+1+\sqrt{8E_k+1}}{2};\ 2\sqrt{E_k}+\sqrt{8E_k+1}\right).$$

Behelyettesítéssel ellenőrizhető, hogy az $E_1 = 1$ a $(3,\ 4,\ 5)$, az $E_2 = 36$ pedig a $(20,\ 21,\ 29)$ MED háromszöget adja. Az érdeklődő olvasó az állítás (középiskolás ismeretekkel is követhető) bizonyítását a [2]-ben megtalálja.

Végül [5] nem csak a majdnem egyenlőszárú derékszögű háromszögekkel, hanem a majdnem derékszögű, ezen belül a majdnem derékszögű egyenlőszárú háromszögekkel is foglalkozik, sőt a háromszögek e két osztálya között kapcsolatot is teremt.

Egy háromszöget majdnem derékszögűnek nevezünk, ha oldalaira $x^2 + y^2 = z^2 \pm 1$ teljesül. Ezek között már sok egyenlőszárút találunk. Ilyenek például az (5, 5, 7), (29, 29, 41), (169, 169, 239) vagy a (12, 12, 17), (70, 70, 99), (408, 408, 577) háromszögek. Az első típusba tartozó háromszögek szára épp egy MED háromszög átfogója, alapja pedig ugyanebben a MED háromszögben a két befogó összege. A második típusba tartozó háromszögeknek az alapja két egymást követő MED háromszög átfogójának a számtani közepe, szára pedig a kisebbik MED háromszög három oldalának összege.

A kockás papíron a további barangoláshoz válasszuk a *KöMaL* 1989/10. számában megjelent Gyakorló feladatok egyetemi felvételire című összeállításból a következő feladatot:

1. feladat: *Határozzuk meg a $K(-2;\ 1)$ középpontú és $r = 5$ egység sugarú kör, valamint az $F\left(1;\ -\frac{11}{4}\right)$ fókuszú, $y = -\frac{13}{4}$ vezéregyenesű parabola metszéspontjait.*

Ez a feladat egy kicsit átszövegezve így hangzik:

2. feladat: *Határozzuk meg a $K(-2;\ 1)$ középpontú, $r = 5$ egység sugarú kör, valamint az $f(x) = x^2 - 2x - 2$ hozzárendeléssel megadott függvény képének közös pontjait.*

Nézzük röviden ennek a megoldását, de természetesen ezzel az elsőt is megoldjuk.

Legyen $P(x;\ y)$ a feltételeknek megfelelő pont. Ekkor $PK = 5$, vagyis Pitagorasz-tétellel:

$$(x+2)^2 + (y-1)^2 = 25. \tag{5}$$

A P pontnak a megadott másodfokú függvény képére, a parabolára is illeszkedni kell, ezért az

$$y = x^2 - 2x - 2 \tag{6}$$

összefüggésnek is teljesülnie kell.

Az (5) és a (6) egyenletekből álló kétismeretlenes egyenletrendszer megoldásai adják a P pont koordinátáit. Behelyettesítéssel az $(x+2)^2 + (x^2 - 2x - 3)^2 = 25$ egyenlethez jutunk, amit

$$x^4 - 4x^3 - x^2 + 16x - 12 = 0 \tag{7}$$

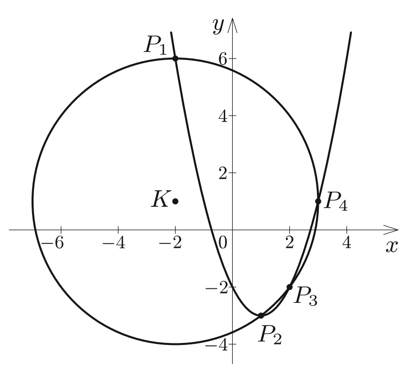
alakra tudunk rendezni. Ha ennek a negyedfokú egyenletnek van egész megoldása, akkor az $x^4 - 4x^3 - x^2 + 16x$ (ami egy egész számmal egyenlő) osztható lenne ezzel az x-szel. Vagyis ebben az esetben az x csakis a 12 osztói közül kerülhet ki.

A 12 osztói: ± 12, ± 6, ± 4, ± 3, ± 2, ± 1. A tizenkét lehetőség kipróbálásával most szerencsénk van, mert megkapjuk a (7) egyenlet összes megoldását:

$$x_1 = -2, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 2, \quad x_4 = 3.$$

A (6) felhasználásával pedig megadható a kapott négy közös pont második koordinátája is, vagyis a keresett pontok:

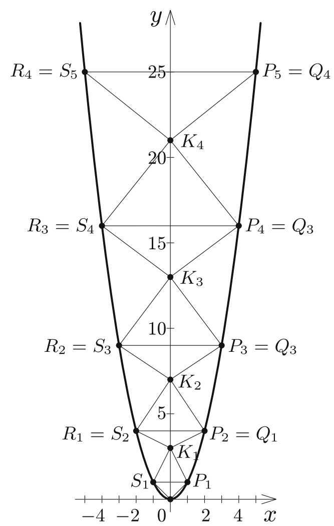
$$P_1(-2;\ 6), \quad P_2(1;\ -3), \quad P_3(2;\ -2), \quad P_4(3;\ 1).$$



Szeretjük, ha a gyakorló feladatokat olyan szépre tervezik, hogy a megoldások egészek. Ebben az esetben is ez történt. Adott volt a rácson egy kör, amelynek a középpontja rácspont, sugarának hossza pedig egész. Adott volt továbbá az x^2 hozzárendelésű függvény képének egy olyan eltoltja, hogy a tengelypontja rácspontra került. Szerettük volna, hogy legyen négy közös pontjuk, és ezek rácspontok legyenek.

Van-e más elrendezés a fenti feltételek mellett? Ha van, keressünk ilyeneket. Ha elkezdünk rajzolgatni a kockás papíron, akkor hamar észrevehetjük, hogy speciális elrendezést érdemes keresnünk, mert ekkor gyorsan lehet sikerélményünk. Az origóban álló normálparabola rácspontjait bejelölve egymásra rakott húrtrapézokból álló torony jelenik meg előttünk. Az építmény egy egyenlő szárú derékszögű háromszöggel indul, ahogyan ezt az *ábrán* is láthatjuk.

Bármely ilyen húrtrapéz köré írt köre és a normálparabola ezek szerint négy rácspontban metszi egymást. Vagyis végtelen sok olyan kört találtunk, amely a normálparabolát négy rácspontban metszi. Vajon ezeknek a köröknek hol van a középpontja? Van-e közöttük olyan, amelyiknek a sugara egész?



3. feladat: *Vegyük az $f(x) = x^2$ hozzárendeléssel adott függvény képéről a $P_n(n; n^2)$, $Q_n(n+1; n^2+2n+1)$, $R_n(-n-1; n^2+2n+1)$; $S_n(-n; n^2)$ pontokat, ahol n egy tetszőleges pozitív egész számot jelöl. Igazoljuk, hogy a $P_nQ_nR_nS_n$ húrtrapéz körülírt körének középpontja rácspont. Adjuk meg a középpont koordinátáját és a kör sugarának hosszát.*

Az ábra alapján a $P_1Q_1R_1S_1$ húrtrapézhoz a $K_1(0; 3)$ középpont és az $r_1 = \sqrt{5}$ sugár, a $P_2Q_2R_2S_2$ húrtrapézhoz a $K_2(0; 7)$ középpont és az $r_2 = \sqrt{13}$ sugár tartozik. Mivel $3 = 1^2 + 2$, $7 = 2^2 + 3$, ezért $K_n(0; n^2 + n + 1)$ a sejtésünk. Alkalmazzuk most is a Pitagorasz-tételt a rácson. Számításunk eredménye:

$$K_nP_n = K_nQ_n = \sqrt{n^2 + (n+1)^2},$$

ami a sejtésünk bizonyítását jelenti. Ezek alapján a $P_nQ_nR_nS_n$ húrtrapézok körülírt körének középpontja minden esetben rácspont lesz: $K_n(0; n^2 + n + 1)$, a körök sugarának hossza pedig: $r_n = \sqrt{n^2 + (n+1)^2}$.

Az r_n akkor lesz egész szám, ha az $n^2 + (n+1)^2$ középpontos négyzetszám egyben négyzetszám is. Mi 20 ilyen középpontos négyzetszámot találtunk számítógéppel. Vagyis akkor lesz a sugár hossza egész számmal megadható, ha $K_nP_n = K_nQ_n$ egy MED háromszög átfogója, és már tudjuk, hogy végtelen sok MED háromszög van.

Vizsgálataink alapján kiderült, hogy végtelen sok szimmetrikus ábra létezik, ahol a normálparabolát négy rácspontban metsz egy rácsközepű, egész sugárhosszúságú kör. A kockás papíron rajzolgatva szerettünk volna a 2. feladatban látott további, nem szimmetrikus elrendezést is találni. A véletlen keresgélés nem kecsegtetett nagy reményekkel. Elsőként Rátki Barnabás számítógép segítségével talált egy megfelelő új ábrát. Számolással ellenőrizhető, hogy az általa megadott $A(15;\ 20)$, $B(20;\ -15)$, $C(24;\ -7)$, $D(25;\ 0)$ pontok illeszkednek az origó középpontú 25 sugarú körre, és az $f(x) = (x-21)^2 - 16$ hozzárendeléssel megadott függvény képére is. Ugyanennek az elrendezésnek különböző eltolt változatait mások is megtalálták.

Ebben az írásban ízelítőt szerettünk volna mutatni abból, hogy a füzetlapunk rácsa milyen sok érdekességet tartogat számunkra, milyen sok felfedezés várhat ránk, ha egy kicsit barangolunk a kockás papíron. Végezetül egy rövid feladatsorral szeretnék minden érdeklődőt biztatni erre a kalandozásra, újabb és újabb érdekes kérdések megfogalmazására. A figurális számokra vonatkozó bizonyításokat feltétlenül szemléltessük rácson is. A következő feladatok különböző nehézségűek, de reméljük, hogy mindenki talál kedvére valót.

Ajánlott feladatok

1. Adjunk meg néhány háromszögszámot, amely négyzetszám is.

2. Milyen figurális számot és hányadikat kapjuk, ha az n-edik négyzetszámból elvesszük az n-edik pozitív páratlan számot?

3. Adjunk meg két egymást követő háromszögszámot, melyek különbsége kétjegyű négyzetszám.

4. Adjunk az n-edik négyzetszámhoz n-et. Igazoljuk, hogy az így kapott szám egy háromszögszám duplája.

5. Igazoljuk, hogy a $2n$-edik háromszögszám az n-edik négyzetszám és az n-edik háromszögszám duplájának az összege.

6. Egy háromszögszámhoz adjuk hozzá valamelyik szomszédjának háromszorosát. Igazoljuk, hogy háromszögszámot kapunk.

7. Az első középpontos négyzetszám az 1. Adjuk meg a 77. középpontos négyzetszámot.

8. Igazoljuk, hogy minden középpontos négyzetszám páratlan.

9. Mutassuk meg, hogy ha a $(2n+1)$-edik négyzetszámhoz hozzáadjuk az n-edik vagy az $(n+1)$-edik négyzetszám négyszeresét, akkor középpontos négyzetszámot kapunk.

10. Igazoljuk, hogy a középpontos négyzetszámok néggyel osztva egyet adnak maradékul.

11. Igazoljuk, hogy egy háromszögszám négyszereséhez 1-et adva középpontos négyzetszámot kapunk.

12. Adjuk meg az n-edik középpontos hatszögszám képletét. (Az első ilyen szám az 1.)

13. Igazoljuk, hogy ha a $(2n+1)$-edik négyzetszámból elvesszük az n-edik háromszögszám kétszeresét, akkor az n-edik hatszögszámot kapjuk.

14. Igazoljuk, hogy ha az $(n+1)$-edik középpontos négyzetszámhoz hozzáadjuk az n-edik háromszögszám kétszeresét, akkor az n-edik hatszögszámot kapjuk.

15. Igazoljuk, hogy egy háromszögszám hatszorosához 1-et adva középpontos hatszögszámot kapunk.

16. Adjunk meg egy-egy olyan pitagoraszi számhármast, amelyben a legnagyobb szám (vagyis a derékszögű háromszög átfogójának hossza): 5, 13, 25, 41, 61, 85.

17. Bizonyítsuk be, hogy a másodiktól kezdve minden középpontos négyzetszám egy pitagoraszi számhármasban a legnagyobb tag.

18. Használjuk a cikk 3. feladatának jelöléseit.

a) Adjuk meg a $P_nQ_nR_nS_n$ húrtrapéz területét n függvényében.

b) Adjuk meg a $K_nQ_nK_{n+1}S_{n+1}$ deltoid területét n függvényében.

19. Megadtunk a cikkben két nem szimmetrikus kör és parabola elrendezést a kívánt feltételek mellett. Van-e további ilyen elrendezés?

20. A cikkben szereplő n-edik nevezetes derékszögű háromszög befogói a_n, b_n, az átfogója pedig c_n. Igazak-e a következő összefüggések?

a) $c_nc_{n-1} = 2a_na_{n-1} + a_n + a_{n-1} + 2$;

b) $c_nc_{n-1} = a_na_{n-1} + b_nb_{n-1} + 1$;

c) $a_nb_{n-1} + b_na_{n-1} + 1 = a_na_{n-1} + b_nb_{n-1}$;

d) $a_n^2 + a_{n-1}^2 = 6a_na_{n-1} + 2a_n + 2a_{n-1} + 3$;

e) $2(a_{n+1} - a_n) = c_{n+1} + c_n$.

21. Illeszkedik-e végtelen sok rácspont az

$$\frac{x^2}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} - \frac{\left(y+\frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1$$

egyenlettel megadott hiperbolára?

22. Használjuk a cikk 3. feladatának jelöléseit. Adjuk meg n függvényeként a $K_nQ_nK_{n+1}S_{n+1}$ deltoid kerületét. Lehet-e valamelyik deltoid minden oldalhosszának mérőszáma egész szám?

Hivatkozások

[1] https://proofwiki.org/wiki/Generator_for_Almost_Isosceles_Pythagorean_Triangle

[2] http://www.fq.math.ca/Scanned/36-4/nyblom.pdf

[3] http://mathworld.wolfram.com/SquareTriangularNumber.html

[4] https://en.wikipedia.org/wiki/Square_triangular_number

[5] https://www.hindawi.com/journals/ijmms/2016/5189057/

Koncz Levente, Számadó László