

I. rész

1. Egy szabályos n -szög alapú egyenes hasáb lapátlóinak száma, testátlóinak száma és a 24 valamilyen sorrendben egy számtani sorozat egymást követő tagjait alkotják. Határozzuk meg n lehetséges értékeit. (11 pont)

2. Tekintsük a következő állításokat.

A: Két irracionális szám összege mindig irracionális.

B: Van olyan számsorozat, amely korlátos, nem monoton és nem konvergens.

C: Ha egy ötpontú egyszerű gráf minden csúcsa legalább harmadfokú, akkor biztosan tartalmaz kört.

a) Döntsük el, hogy igazak vagy hamisak az állítások. Válaszainkat indokoljuk.

(8 pont)

b) Fogalmazzuk meg a C állítás megfordítását. Döntsük el, hogy igaz vagy hamis az állítás megfordítása. Válaszunkat indokoljuk. (4 pont)

3. Egy négyszög két szomszédos oldalának hossza 3, illetve 4 cm, közbezárt szögük 60° . A négyszög húr- és érintőnégyszög is egyben.

a) Mekkora a négyszög másik két oldala? (7 pont)

b) Számítsuk ki a négyszög beírt és köré írt körének sugarát. (7 pont)

(Válaszainkat cm-ben, két tizedesjegyre kerekítve adjuk meg.)

4. a) Mutassuk meg, hogy az $f(x) = \frac{2^x - 1}{2^x + 1}$ függvény páratlan és korlátos függvény. (7 pont)

b) Egy gömb alakú higanycsepp n egyforma, kisebb cseppekre esett szét. Ezáltal a kis cseppek összfelszíne éppen négyszerese lett az eredeti higanycsepp felszínének. Határozzuk meg n értékét. (7 pont)

II. rész

5. a) Cinkelt érmét szeretnénk készíteni. A „Trükkös hatos” nevű játékban akkor nyerünk, ha az érme hatszori feldobásakor pontosan négyszer lesz fej és kétszer írás. Milyen módon cinkeljük az érmét (vagyis mekkora legyen a fej dobásának a valószínűsége), ha a lehető legnagyobb valószínűséggel szeretnénk nyerni? (8 pont)

b) Legfeljebb hány különböző pozitív prímszám adható meg úgy, hogy közülük bármely három összege is prímszám legyen?

Adjunk példát a maximális elemszámra és mutassuk meg, hogy több prímszámot nem tudunk megadni a kívánt módon. (8 pont)

6. a) Egy családban három gyerek van: Anna, Béla és Csaba. Minden nap kisorsolják, hogy ki vigye le sétáltatni kutyájukat, Buksit (egy kalapba teszik egy-egy cédulára írva a nevüket, majd húznak egy cédulát).

Hány olyan sorsolás van, amelynél egy hetes időszakot véve, minden gyerek sorra kerül a kutyasétáltatás során? (9 pont)

b) Igazoljuk (teljes indukcióval vagy más módszerrel), hogy ha $n \geq 9$ pozitív egész szám, akkor $2^n > 32n$. (7 pont)

7. a) Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet: (8 pont)

$$\operatorname{tg} x \cdot \sin 4x = \frac{1}{2}.$$

b) Adjuk meg azokat a t pozitív egész számokat, amelyekre a fenti egyenletnek a $[2018; t]$ intervallumon pontosan 2018 darab valós megoldása van.

Számításaink során a π minél pontosabb értékével számoljunk. (8 pont)

8. Húzzunk érintőket az $y = x^2$ parabola $A(-1; 1)$ és $B(2; 4)$ pontjaiba.

a) Írjuk fel az érintők egyenletét. (3 pont)

b) Mutassuk meg, hogy az érintők a $C(\frac{1}{2}; -2)$ pontban metszik egymást. (2 pont)

A parabola két részre osztja az ABC háromszöget, egy konvexre és egy konkávra.

c) Számítsuk ki az ABC háromszög területét. (5 pont)

d) Határozzuk meg a konvex és a konkáv alakzat területét. (6 pont)

9. A Bástya SE sakkcsapata nemrég indult először a nemzeti csapatbajnokságban. Egy találkozón 2 csapat küzd meg egymással, mindkét csapat 12 játékosal játszik. Ennek a 12 játékosnak van egy előre rögzített erősségi sorrendje és az egyik csapat legerősebbje játszik a másik csapat legerősebbjével, a második legerősebbek is egymással, stb. Így egy találkozón 12 partira kerül sor. Egy partinak 3 kimenetele lehet: győzelem esetén 1, vereség esetén 0, míg döntetlen esetén fél pontot kap a játékos. Tegyük fel, hogy egy-egy parti kimenetele nem függ a játékosok sakktudásától, mindegyik kimenetel egyformán valószínű. A csapat által elért pontszámot úgy kapjuk meg, hogy összeadjuk az egyes csapaton belüli játékosok által elért pontokat.

a) Mutassuk meg, hogy csak úgy lehet döntetlen (azaz amikor 6 pontot ér el mindkét csapat) egy találkozó, ha egy csapaton belül ugyanannyiszor nyernek és veszítenek. (2 pont)

b) Mennyi annak a valószínűsége, hogy – a fenti feltételek mellett – a Bástya SE döntelent ér el első mérkőzésén? (7 pont)

c) Mennyi annak a valószínűsége, hogy az első három találkozójuk döntetlen lesz és a negyedik meccset megnyerik? Az egyes találkozókon elért eredményeket egymástól függetleneknek tekinthetjük.

Válaszainkat négy tizedesjegyre kerekítve adjuk meg. (2 pont)

A csapat legjobb pontszerzője 9 partit játszott az idény folyamán. Az általa szerzett pontok átlaga $\frac{2}{3}$, míg a szórásnégyzete $\frac{1}{6}$.

d) Határozzuk meg, hogy a játékos hány partiban nyert, veszített illetve ért el döntelent. (5 pont)