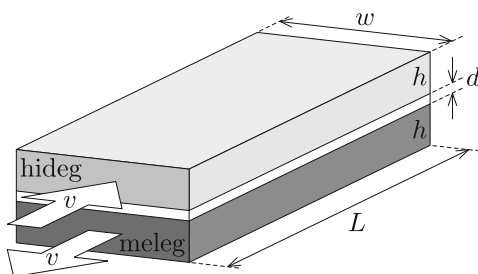


**A 2018. évi Kunfalvi Rezső
olimpiai válogatóverseny
néhány elméleti feladata¹**

Hőcserélő

A hőcserélő olyan eszköz, amelyben egy meleg és egy hideg (folyékony vagy légnemű) közeg között hőcsere jön létre. Az eszközt igen széles körben alkalmazzák fűtési rendszerekben és erőművekben.

Az 1. ábrán látható hőcserélő két L hosszúságú, téglalap keresztmetszetű csőből áll, melyek szélessége w , magassága h . A két csövet d vastagságú, λ hővezetési tényezőjű fémlap választja el egymástól. A kezdetben meleg közeg az alsó csőben áramlik v sebességgel jobbról balra, míg a kezdetben hideg közeg a felső csőben áramlik ellentétes irányban (balról jobbra) ugyancsak v sebességgel. Mindkét közeg térfogategységre eső hőkapacitása c .



1. ábra

A hőcserélőbe való belépéskor a meleg közeg hőmérséklete ΔT_{be} értékkel magasabb, mint a belépő hideg közegé. Amikor a közegek elhagyják a hőcserélőt, a közöttük lévő hőmérséklet-különbség ΔT_{ki} -re csökken. Feltételezzük, hogy mindkét csőben a hőmérséklet csak hosszanti irányban változik, és hőátvitel csak a fémlapban való hővezetéssel, valamint a közegek mozgásával történik.

Igazoljuk, hogy a fenti feltevések mellett a hőmérséklet úgy változik mindkét csőben hosszirányban, hogy a fémlap két oldalán a hőmérséklet-különbség mindenütt állandó!

Határozzuk meg a ΔT_{ki} kilépési hőmérséklet-különbséget a megadott paraméterek függvényében! Előfordulhat-e, hogy a kezdetben hidegebb közeg végső hőmérséklete melegebb, mint a kezdetben meleg közeg kilépő hőmérséklete?

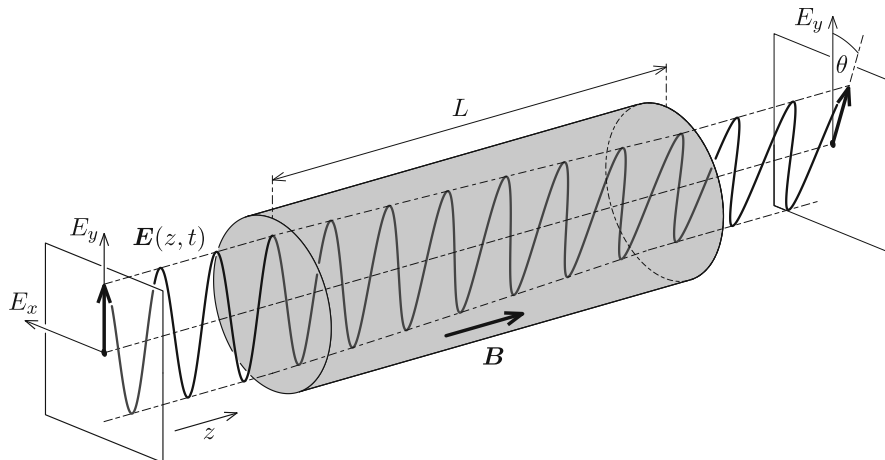
Fotonrakéta

A fotonrakéta olyan elképzelt rakéta, amely fotonokat használ hajtóanyagként. Tegyük fel, hogy a hajtómű ideális, tehát a rakéta tömegének egy részét fotonokká alakítja, amiket egyirányban, párhuzamosan kilövell. A rakéta nyugalomból indul, és kezdeti (nyugalmi) tömege M .

Határozzuk meg a hajtómű bekapcsolása után a rakéta v sebességét a rakéta m (nyugalmi) tömegének függvényében! (A v sebességet abban a rendszerben mérjük, amelyből a rakéta indult.)

Faraday-effektus

Ha átlátszó szigetelő anyagot homogén mágneses mezőbe helyezünk, és az anyagon a mágneses indukcióvektorral azonos irányba haladó, lineárisan polarizált fénynyalábot bocsátunk keresztül, akkor a közegből kilépő fény továbbra is lineárisan polarizált marad, azonban polarizációjának iránya a B mágneses indukcióval arányos θ szögben elfordul (2. ábra). Ebben a feladatban ennek az optikai forgatásnak (az ún. Faraday-effektusnak) a leírásával foglalkozunk.



2. ábra

¹ A versenyt két fordulóban, Budapesten rendezték meg 2018 márciusában. A feladatokat Tasnádi Tamás, Szász Krisztián és Vigh Máté állította össze.

Tekintsünk egy vákuumban elhelyezkedő, L hosszúságú, tömör szigetelő hengert, melynek szimmetriatengelye egybeesik a z tengellyel. Ha a henger egyik ($z = 0$ -nál elhelyezkedő) körlapjára egy y irányban lineárisan polarizált, z irányba terjedő, ω körfrekvenciájú fényhullámot ejtünk, akkor az a hengerbe belépve a $z = 0^+$ helyen (azaz a kör-laphoz nagyon közel) az

$$(*) \quad E_x(t) = 0, \quad E_y(t) = E_0 \cos(\omega t)$$

térerősség-komponensekkel írható le, ahol E_0 pozitív konstans. Ez a hullám egyértelműen előállítható egy jobbra és egy balra cirkulárisan polarizált² fényhullám szuperpozíciójaként.

Bontsuk fel a fenti egyenletekkel megadott beeső fényhullámot kétféle cirkulárisan polarizált hullámra, és adjuk meg ezek $E_x^{\text{jobb}}(t)$ és $E_y^{\text{jobb}}(t)$, valamint $E_x^{\text{bal}}(t)$ és $E_y^{\text{bal}}(t)$ térerősség-komponenseit a $z = 0^+$ helyen. A választ E_0 és ω felhasználásával adjuk meg.

A Faraday-effektus oka az ún. cirkuláris kettőtörés: a mágneses mező jelenlétében a jobbra, illetve balra cirkulárisan polarizált fényre vonatkozóan a szigetelő törésmutatója különböző, n_{jobb} és n_{bal} értékű.

Határozzuk meg, mekkora θ szöggel fordul el a beeső fényhullám polarizációs síkja, miáltal átjut a szigetelőből készült hengeren. A választ L , n_{jobb} , n_{bal} és a fény vákuumbeli λ hullámhossza segítségével adjuk meg, a henger körlapjain történő esetleges visszaverődést hagyjuk figyelmen kívül!

Az n_{jobb} és n_{bal} törésmutatók közötti különbség megértéséhez a közeg atomjainak a fényvel és a homogén mágneses térrel való kölcsönhatását kell vizsgálnunk. A továbbiakban tegyük fel, hogy a szigetelő henger anyaga paramágneses³, azaz olyan atomokból áll, melyeknek van mágneses momentuma. Tekintsük az atom egy klasszikus modelljét, melyben az egymással nem kölcsönható, pontszerű elektronok a sokkal nagyobb tömegű mag körül körpályán keringenek. Az elektronok és az atommag spinjétől mindvégig tekintsünk el!

Adjuk meg az atom μ eredő mágneses momentumának és az elektronok eredő N perdületének hányadosát! A választ az e elemi töltéssel és az elektron m tömegével fejezzük ki!

Ha a paramágneses anyagban z irányú, B indukciójú mágneses mező is jelen van, akkor a közeg véletlenszerű orientációjú, μ mágneses momentumú atomjai elkezdenek a z tengely körül precesszálni. Határozzuk meg ennek a precessziónak az ω_p szögsebességét! A mágneses indukció irányához képest milyen körüljárású ez a mozgás?

Most vegyük figyelembe, hogy a homogén mágneses téren kívül az anyagban a (*) összefüggéssel megadott, lineáris polarizációjú fényhullám is jelen van. Az előző részfeladatban leírt precesszió miatt a fényhullám kétféle cirkulárisan polarizált összetevőjének térerősségvektora az atomokhoz képest $\omega \pm \omega_p$ nagyságú szögsebességgel forog. Laboratóriumban előállítható mágneses terek esetén ω_p sokkal kisebb a látható fény ω körfrekvenciájánál. Ismert továbbá, hogy $B = 0$ esetén a közeg törésmutatója (mind a jobbra, mind pedig a balra cirkulárisan poláros fényre nézve) $n(\lambda)$ függvény szerint függ a benne haladó fény vákuumbeli λ hullámhosszától.

Az eddigi eredmények felhasználásával adjuk meg a közeg optikai forgatását jellemző $\mathcal{V} = \theta/(LB)$ ún. Verdet-állandó értékét! Eredményünket a c fénysebesség, a fény vákuumbeli λ hullámhossza, valamint e , m és $dn/d\lambda$ felhasználásával adjuk meg!

A szigetelő henger után egy síktükröt helyezünk el a fény útjára merőlegesen, így a fényhullám még egyszer áthalad (ellenkező irányban) a közegen. Összesen mekkora szöggel fordul el a fény polarizációja? A választ a $\mathcal{V}$ Verdet-állandóval, valamint B -vel és L -lel adjuk meg!

² A cirkuláris polarizáció azt jelenti, hogy a tér tetszőleges pontjában az elektromos térerősségvektor nagysága időben állandó, iránya pedig ω szögsebességgel forog a terjedési irányra merőleges síkban. A jobb- és balkezesiséget a térerősségvektor forgási iránya szabja meg.

³ A paramágnes olyan anyag, melynek relatív permeabilitása $\mu_r \approx 1$, miközben $\mu_r > 1$.