

Februári számunkban bemutattuk a módszer használatát egy matematikai probléma megoldásánál. Folytatásként nézzük meg, hogyan használható a szimulációs módszer a fizika területén, például az elektrosztatikában. Legyen egy  $V$  térfogatban  $N$  számú pontszerű töltés vákuumban. Adjuk meg az  $i$ -edik ponttöltés nagyságát a  $Q_i$  számmal és helyét az  $\mathbf{r}_i$  helyvektorral ( $1 \leq i \leq N$ ). A Coulomb-törvény segítségével a tér egy  $\mathbf{r}$  vektorral mutatott helyén kiszámítható az előbbi töltések által keltett  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  térerősség és  $U(\mathbf{r})$  potenciál, melyek értékei

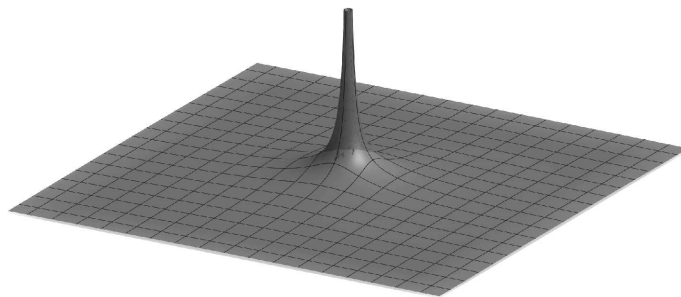
$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = k \sum_{i=1}^N \frac{Q_i(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} \quad \text{és} \quad U(\mathbf{r}) = k \sum_{i=1}^N \frac{Q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|}.$$

Az összegzések egyszerűen elvégezhetők, nagyszámú ponttöltés esetén akár számítógépet is segítségül hívhatunk.

A térerősség és a potenciál meghatározása összetettebb feladat, ha a töltések nem pontszerűek, hanem folytonos töltéeloszlások vannak a térrészben, például testeken vagy azok felületén. Ekkor a Gauss-törvény használatával néhány szimmetrikus esetben könnyen kiszámíthatóak az előbbi mennyiségek. Általános esetben azonban el kell végezni az összegzéseket, illetve helyettük ekkor integrálni szükséges. Ha például a  $Q$  töltés egy  $A$  felületen, egyenletes töltéssűrűséggel helyezkedik el, akkor a felületet gondolatban  $dA$  nagyságú elemi részekre bontjuk, melyek mindegyikére  $dQ = Q \frac{dA}{A}$  töltés jut  $\sigma = \frac{Q}{A}$  töltéssűrűséggel. Az összeg helyére ekkor a következő integrálok lépnek:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = k \int_A \frac{\sigma(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{dA})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{dA}|^3} dA \quad \text{és} \quad U(\mathbf{r}) = k \int_A \frac{\sigma}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{dA}|} dA.$$

Az  $U(\mathbf{r})$  potenciál a tér minden pontjához egy skalár értéket rendel. A függvény általános esetben például úgy szemléltethető, hogy az értékeihez hozzárendeljük egy színskála színeit, és azokkal színezzük a térbeli pontokat. Szerencsére a problémák egy részében a feladat olyan töltéselrendezésű, amely valamely térirányban szimmetrikus, így sokszor elég egy síkmetszetben található töltéseket vizsgálni és ebben a síkban ismerni a térerősség és a potenciál értékét. Ekkor  $U$  egy  $R^2 \rightarrow R$  függvény, amely térben vagy akár síkban is ábrázolható, ez utóbbi esetben pl. szintvonalakkal vagy színekkel. Egy ponttöltés potenciálfüggvényének képe:

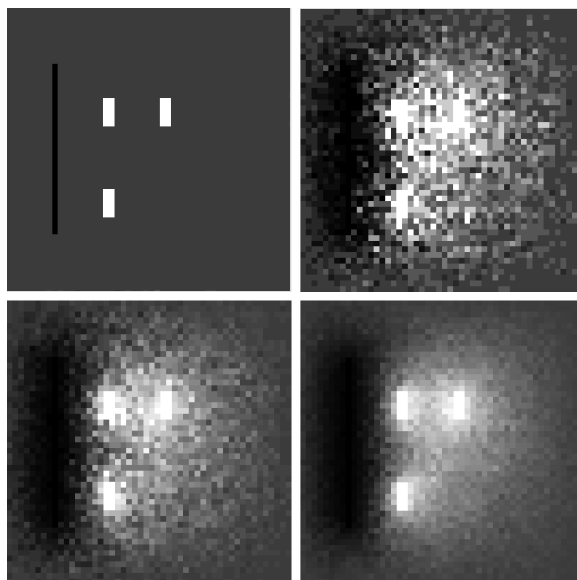


A potenciálfüggvény számítása összetett töltéeloszlások esetén nem egyszerű. A gyakorlati alkalmazások során elegendő a potenciál közelítő értékének ismerete, ami a következő bolyongásos szimulációval végezhető. Példaként keressük egy síkbeli töltéeloszlás potenciálját. A sík vizsgált részét gondolatban osszuk fel  $N \times M$  elemi négyzetre, melyek mindegyike tartalmazhat  $\pm q$  elemi töltést, vagy üres. A sík minden négyzetének adjunk egy kezdetben zérus  $p(n, m)$  értéket, és indítsunk mindegyikből egy véletlenszerű mozgással rendelkező „részcskét”. A bolyongó részecske egy szimulációs lépésben a sík bármely négyzetéből egy csúcsban vagy élben vele szomszédos négyzetre léphet. Ha olyan mezőre ér, amelyben van töltés, akkor a mező töltése hozzáadódik a kiindulási hely  $p(n, m)$  értékéhez. A bolyongást minden négyzetre  $S$  alkalommal elvégezzük, majd a kapott  $p(n, m)$  értékeket  $S$ -sel osztjuk. Megmutatható, hogy az így létrejött  $p(n, m)$  függvény a  $q_i$  töltések által létrehozott elektromos potenciált közelíti. A közelítés annál pontosabb, minél többször végezzük el a szimulációt, tehát  $S$  értékének növelésével az eredmény pontosítható.

A lap 2018. márciusi számában kitűzött **I. 453.** feladat lényegében ennek a szimulációnak az elvégzését és a potenciál színskálával történő ábrázolását tűzte ki feladatként a versenyzőknek.

A négy ábrán egy  $50 \times 50$ -es, négyzet alakú terület látható:

- a bal felső képen a negatív és pozitív  $\pm q$  elemi töltések helye;
- a jobb felső képen 5 szimuláció elvégzése után a potenciál szürkeárnyaltos ábrája;
- az alsó sor képein ugyanez 20 és 100 szimuláció elvégzése után.



A szimulációt végző program a fenti leírásnak, és az **I. 453.** feladatnak megfelelően a következő fontosabb részekből állítható össze:

1. **Adatok bevitele ( $N$ ,  $M$ ,  $S$ ,  $\pm q_i$  töltések koordinátái)**
2. **Kezdőértékek megadása**
3. **Szimuláció elvégzése  $S$ -szer minden egységnégyzetre**
4.  **$p(n, m)$  értékeinek leképezése egy színskálára és ábrázolásuk**

A szimuláció elvégzéséhez érdemes fölvenni egy  $q$  kétdimenziós tömböt, melynek értékei megadják az elhelyezett töltések értékét a téglalap  $n$ -edik sorában és  $m$ -edik oszlopában (vagy 0-t), illetve egy hasonló  $p$  tömböt, amely a potenciál értékét tartalmazza a szimuláció során (kezdeti értéke 0).

Mivel egy töltéssel rendelkező négyzetből induló bolyongás azonnal egy töltéshez ér, ezért azokon a helyeken, ahol  $q(n, m)$  nem nulla,  $p(n, m)$  értéke egyenlő  $q(n, m)$  értékével. Minden más esetben addig változtatunk helyet, amíg egy töltéssel rendelkező négyzethez nem érünk. Előfordulhat ugyan, hogy a bolyongás „kivezet” a vizsgált területről, vagyis túllép a határokon. Ekkor két lehetőség közül választhatunk: vagy engedjük, hogy a bolyongás tetszőleges távolra vezessen, vagy abbahagyjuk a bolyongást, és nem változtatunk a kiindulási négyzet  $p$  értékén, és új bolyongást indítunk. Az első esetben a program igen sokáig futna, amit nem szeretnénk, ezért érdemes a második esetet választani, illetve a vizsgált terület méreteit úgy megadni, hogy a töltések ne a szélén helyezkedjenek el. Így az elkóborlás esélye csekély, és nem befolyásolja számottevően a szimuláció eredményét.

A program többi részének elkészítése nem nehéz, az elkészült programok megnézhetők és tesztelhetők honlapunkon az **I. 453.** feladatnál.