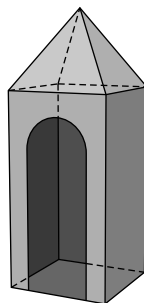


I. rész

1. Egy katonai laktanyában az ábrán látható őrbódében őrködnek a katonák. A 3,5 m magas építmény egy négyzetes hasápból és egy hozzá kapcsolódó szabályos négyoldalú gúlából áll. Bejárata téglalap alakú, annak felső, rövidebb oldalára illesztett félkörrel. A négyzetes oszlop alapéle 1,3 m, magassága 2,5 m, míg a bejárat téglalap alakú része 0,8 m széles és 1,8 m magas.



a) Mennyibe kerül az őrbóda külső lefestése, ha 1 m² felület lefestéséhez 1,5 dl festék szükséges, melynek literje 3200 Ft? (Az őrbóda tetejét is festjük, ajtaját azonban nem.) (6 pont)

A laktanyában a hétvégi (pénteki, szombati és vasárnapi) éjszakai őrseg kialakításakor a parancsnok az alábbi szempontokat veszi figyelembe:

- Minden katona legalább egy éjszaka őrködjön, de ne legyen olyan katona, aki mindhárom éjszaka őrségben van.
- A teljes létszámnak a fele teljesítsen pontosan két éjszaka őrszolgálatot.
- Az őrség létszáma az első éjszaka 16 fő, a második éjszaka 22 fő, míg a harmadik éjszaka 10 fő.

b) Hány katona vett részt az éjszakai őrségben? (5 pont)

2. Egy szabályos dobókockával 20-szor dobva 5 db egyest, 5 db kettest, 4 db hármast, 3 db négyest és 3 db ötöst dobtunk.

a) Számítsuk ki a dobott számok átlagát és szórását. (3 pont)

A dobott számok közül 4 db-ot véletlenszerűen kiválasztunk.

b) Hány esetben lesz a kiválasztott számok között legalább egy hármas? (4 pont)

c) Mekkora annak a valószínűsége, hogy mind a négy kiválasztott szám különböző? (6 pont)

3. a) Az $\mathbf{u}(1; \log_8 x)$ és $\mathbf{v}(\log_2 x; -1)$ vektorok merőlegesek egymásra. Határozzuk meg x értékét ($x > 0$). (5 pont)

b) Adott a síkon n db pont, melyek közül semelyik három nem illeszkedik egy egyenesre ($n \geq 3$). Határozzuk meg n értékét, ha a pontok 20-szor annyi négyszöget határoznak meg, mint egyenest. (8 pont)

4. Adott az $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $x \mapsto x^4 + 3x^2 + 1$ függvény.

a) Igazoljuk, hogy az f függvény szigorúan monoton csökken a negatív valós számok halmazán. (3 pont)

b) Igazoljuk, hogy az f függvény páros. (4 pont)

c) Adjuk meg az f függvénynek azt az F primitív függvényét, amelyre $F(-1) = 2$. (4 pont)

d) Állapítsuk meg a $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 1}{x^4}$ határértéket. (3 pont)

II. rész

5. a) A tízes számrendszerben felírt $\overline{abc}$ háromjegyű szám számjegyei a felírás sorrendjében egy számtani sorozat egymást követő három elemét alkotják. Ha a háromjegyű számot elosztjuk a számjegyeinek összegével, 26-ot kapunk. Ha az eredeti számban a százask és az egyesek számát felcseréljük, az eredetinel 396-tal nagyobb számot kapunk. Melyik ez a háromjegyű szám? (7 pont)

b) Adjuk meg azokat a különböző számjegyekből álló tízes számrendszerben felírt $\overline{abc}$ alakú háromjegyű számokat, amelyek a 4, 6 és 9 számok közül pontosan kettővel oszthatók. (7 pont)

c) Lehet-e $a^p \cdot b^q \cdot c^r$ négyzetszám, ha a , b és c különböző prímszámok, p , q és r pedig különböző páratlan egészek? (2 pont)

6. Egy földmérő noteszában egy vízszintes háromszög alakú telekről a következő bejegyzés olvasható: „A telek három sarkán villanypózna, fűrt kút és gázcsanak található. A villanypózna a fűrt kúttól 46 méterre, a fűrt kút a gázcsanaktól 20 méterre található. A villanypóznánál állva a fűrt kút és a gázcsanak alkotta szakasz 25° -os szögben látszik.”

a) Számítsuk ki a háromszög alakú telek lehetséges területét. (5 pont)

Az előbbi telken a víz-, a gáz- és az elektromos ellátottság nagyon fontos, ugyanis azon kereskedelmi egység épül. Az elektromos rendszer költsége a víz- és a gázellátás költségeinek mértani közepe. Ha a gázellátás költségeit 100 000 Ft-tal csökkentenénk, akkor a víz-, az elektromos- és a gázellátás költségei ebben a sorrendben számtani sorozatot alkotnának. Az elektromos költségek a vízellátás költségeinek 150át teszik ki.

b) Mennyibe kerülnek a felsorolt közművek egyenként? (6 pont)

A telken a víz-, gáz- és az elektromos ellátottság kivitelezésére hat árajánlat érkezett hat különböző vállalkozástól.

c) Igazoljuk, hogy a versenytárgyalás résztvevői között biztosan van három olyan személy, akik kölcsönösen ismerik, vagy három olyan, akik kölcsönösen nem ismerik egymást (Egy vállalkozást egy tárgyalópartner képvisel). (5 pont)

7. Tekintsük a következő, *fagrafra* vonatkozó állítást:

Ha 5 fagrafnak összesen 41 éle van, és ezeket a fagrafokat egy gráfnak tekintjük, akkor ezen gráf pontjainak száma páros.

a) Adjuk meg az előbbi állítás logikai értékét (igaz vagy hamis). A választ indokoljuk. (3 pont)

b) Igazoljuk, hogy ha egy ötpontú egyszerű gráfnak 8 éle van, akkor a gráfnak van legalább két olyan pontja, amelyből pontosan három él indul ki. (5 pont)

2017. november 8-án a Fővárosi Állat- és Növénykertben kisélefant született. A hírt először csak az állat egyik gondozója tudja.

c) Hányféleképpen juthat el a hír a többi 4 gondozóhoz, ha mindenki telefonon beszél a másikkal, és a lehető legkevesebb hívással értesül mindenki a hírről? (8 pont)

8. Az ábrán egy 300 méter hosszú egyenes alagút bejárata látható, mely egy 8 méter sugarú kör egy része. Az alagúton keresztülvívó autót az alagút tetejétől 9,5 méterre találhatók.



a) Milyen széles az autótút? (3 pont)

b) Mekkora térfogatú kőzetmennyiséget kellett eltávolítani az alagút fúrása során? (5 pont)

Egy túlméretes szállítmány olyan téglatest alakú tárgyat szállít, melyet a jármű 1,5 méter magasan lévő platójára helyeznek.

c) Mekkora lehet legfeljebb egy olyan tárgy keresztmetszete, ami még átvihető a kétsávos alagúton szabályosan közlekedve? (8 pont)

9. A gumiszerelő műhelyben a szakember tudja, hogy normál körülmények között a gépjárművek első – meghajtott – két kerekén lévő gumik 30 000 kilométer alatt, a hátsó gumik 50 000 kilométer alatt kopnak el.

a) Hány kilométert képes biztonságosan autózni adott gumiszettel az autós, ha az első- és hátsó tengelyen lévő kerekek egymással kicserélhetők? (6 pont)

A személygépkocsikra való gumik gyártósoráról lekerülő termékeket nagyon alaposan ellenőrzik. Egy gyártósori széria jellemzően 80 000 gumit tartalmaz, melyből általában 400 darab hibás (méret és/vagy anyag összetételi eltérés miatt). Az automatikus minőségellenőrzésen az ellenőrző berendezés csak a valóban hibás gumik 99%-át találja meg, a jó termékek 2%-át viszont hibásnak minősíti.

b) Mekkora annak a valószínűsége, hogy az automatikus ellenőrző berendezés által hibásnak minősített gumi valóban hibás? (5 pont)

c) Mekkora valószínűséggel képes az automatikus ellenőrző berendezés a jó minősítést megállapítani? (5 pont)