

I. rész

1. Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket (ha a megoldás pontos értéke nem racionális szám, akkor közelítő értéket is adjunk):

a) $3^{2x+2} + 9^{2x+1} = 4.$ (5 pont)

b) $\log_2(x-3) + (\log_4(8x-24))^2 = 6,25.$ (7 pont)

2. Egy háromszög oldalhosszai olyan számtani sorozat első három eleme, amelynek második eleme 6.

a) Adjuk meg azt a számhalmazt (a legegyszerűbb alakú) pontos értékekkel, amelynek elemei az ilyen háromszögek területei. (7 pont)

b) Van-e az ilyen háromszögek között maximális területű, van-e minimális területű? Ha igen, akkor melyik az? (2 pont)

c) Van-e az ilyen háromszögek között két olyan, amelyeknél a beírt kör sugara egyenlő? Ha igen, akkor melyek azok? (3 pont)

3. Egy ügyfél egy bankból 1980-ban felvett egymillió Ft kölcsönt, évi 5%-os kamatra, 20 évi, évente egyszeri, azonos összegű törlesztési kötelezettséggel.

a) Mennyi volt az évi törlesztési összeg, 10 Ft-ra kerekítve? (5 pont)

A kölcsönszerződést nem lehetett megváltoztatni a növekvő infláció ellenére sem, pedig 1992-ben (12 évvel a tárgyalat hitelfelvétel után) már a bank adott 10%-os kamatot a nála elhelyezett pénzre. Ezért a bank a fent leírt kölcsön felvevőjének felajánlotta, hogy hátralevő tartozását megszüntetheti, ha az éppen fennálló tartozásának 90%-át kifizeti.

b) Mennyivel tartozott az ügyfél 12 év leteltével? (4 pont)

c) Mennyit helyezzen el az ügyfél egy (másik) bankban, hogy abból az eredeti törlesztő részletét évente kivéve és 10%-os kamattal számolva 8 év alatt megszüntesse a tartozását? Érdemes-e elfogadni a bank ajánlatát, vagy kisebb összegnek egy (másik) bankban való elhelyezésével érdemes tovább törleszteni a tartozását? (4 pont)

4. Jelölje k azt a kört, amelyik érinti a koordináta-rendszer x tengelyét, és érinti az $f(x) = \frac{1}{3}(x^2 + 20)$ ($x \in \mathbb{R}$) függvény grafikonját a függvénynek a 2 abszcisszájú pontjában. (A függvény grafikonjának az érintése egy pontban azt jelenti, hogy az érintő kör ebben a pontban érinti a grafikonhoz az adott pontban húzott érintőt, és az érintő elválasztja a grafikon és a kört.)

a) Írjuk fel a k kör egyenletét. (7 pont)

b) Mennyi annak a korlátos síkidomnak a területe, amelyet az y tengely, az x tengely, a k kör és a függvény grafikonja határol? (7 pont)

II. rész

5. a) Oldjuk meg az X halmazra az $A \setminus X = B$; $A \cup X = C$ egyenletrendszert, ahol az adott A , B , C halmazokra $B \subset A \subset C$ teljesül. (6 pont)

b) Igazoljuk, hogy az A és B ítéletekre az $(A \vee B) \wedge (A \vee \neg B)$ és A ítéletek ekvivalensek. (6 pont)

c) Igaz-e, hogy $\forall H \subset \mathbb{R}^+$ és $\forall h \in H$ esetén $\exists n \in \mathbb{N}^+$ úgy, hogy $\frac{1}{n} < h < n$? Ha nem, akkor adjunk rá példát, ha igen, akkor írjuk le, hogy az ilyen n függ-e h -től, vagy nem? Állításunkat bizonyítani nem kell. (4 pont)

6. a) Hány olyan 2018 pontú, páronként nem izomorf fagráf van, amelyekben nincs háromnál több élt tartalmazó út? (11 pont)

b) Hol helyezkednek el a koordináta-rendszerben azoknak a 2018 pontú fagráfoknak a pontjai, amelyek mindegyikének pontja az origó, és minden élének a két végpontja olyan $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$ pont, amelyre x_1, y_1, x_2, y_2 egész számok, és az $(x_1 - x_2)$, $(y_1 - y_2)$ számoknak az egyike 0, a másik 0, 1, vagy -1 . (5 pont)

7. Egy társaság 5 nőből és 5 férfiből áll, és köztük két házaspár van.

a) Hányféleképpen ülhetnek le egy kerek asztal köré, ha minden nő mindkét oldalán férfi ül? Két leülés különböző, ha van olyan személy a társaságban akinek a két leülésnél legalább az egyik oldal (jobb vagy bal) felől nem ugyanaz ül, mint a másik leülésnél. (4 pont)

b) Hányféleképpen ülhetnek le egy kerek asztal köré, ha minden nő mindkét oldalán férfi ül, és mindkét férj a felesége jobb oldalán ül (két leülés különböző olyan módon, mint az a) esetről). (4 pont)

c) Mennyi annak a valószínűsége, hogy a társaság úgy ül le, hogy minden nő mindkét oldalán férfi ül, de egyik férfi sem ül a felesége mellett? (8 pont)

8. Legyen

$$f(x) = \begin{cases} \sin 2x, & \text{ha } 0 \leq x \leq \pi, \\ |2 \sin(x - \pi)|, & \text{ha } \pi \leq x \leq 3\pi. \end{cases}$$

a) Differenciálható-e a függvény az $x_0 = \pi$ pontban? (4 pont)

b) Adjuk meg azt a legbővebb halmazt, amelyen a függvény szigorúan monoton növekvő, és amelyen szigorúan monoton csökkenő. (6 pont)

c) Adjuk meg bizonyítás nélkül a függvény szélsőértékeinek helyét és értékét, de jelezzük nem csak azt, hogy minimum vagy maximum, hanem a szélsőértéknek a szigorú, a helyi és az abszolút tulajdonságát is. (6 pont)

9. Egy könyvesboltban három kiadónak (jelölésük legyen A, B, C) mind a négy középiskolai évfolyam részére szóló matematika tankönyve megtalálható, áruk az évfolyamtól nem, csak a kiadótól függően rendre 1500 Ft, 1800 Ft és 2000 Ft. A könyvekről a boltban levő példányok számára vonatkozóan az alábbi adatok állnak rendelkezésünkre.

9. évfolyamos: A-ból 102 db, B-ből 120 db, C-ből 78 db van;

10. évfolyamos: összesen 220 db van, áruk átlagosan 1750 Ft;

11. évfolyamos: összesen 210 db van, áruk átlagosan 1760 Ft;

12. évfolyamosról: nincs adat,

de tudjuk, hogy a négy évfolyaméból együtt (tehát az összes könyv) 810 db van, áruk átlagosan 1760 Ft. (Az átlagok egészre kerekített értékek).

a) Mennyi a raktáron levő 9. évfolyamos könyvárak módusza, mediánja, átlaga és szórása? (6 pont)

b) Mit tudunk a fenti adatok alapján a 12. évfolyamos könyvek számáról és átlagáráról? (5 pont)

c) Ha az A kiadó raktárban levő könyveinek a száma 305, akkor mennyi a B és a C kiadók raktárban levő könyveinek száma, egészre kerekítve (az átlagok is egészre kerekített értékek voltak)? (5 pont)