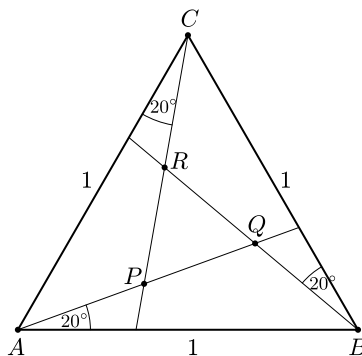


A 2017. májusi emelt szintű érettségi feladatsor egyik feladata a következő volt:

8. b) Az egységnyi oldalú ABC szabályos háromszög minden csúcsánál behúztunk egy-egy szögharmadoló egyenest, így az 1. ábrán látható PQR szabályos háromszöget kaptuk.



1. ábra

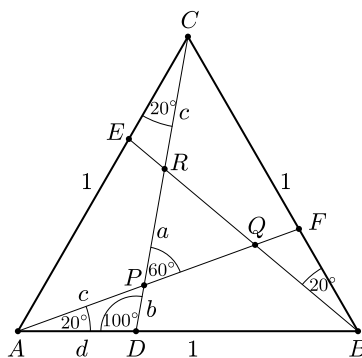
Számítsa ki a PQR háromszög oldalának hosszát!

A hivatalos javítási-értékelési útmutató három különböző megoldást közölt a feladatra, ezek megtekinthetők pl. a

https://www.oktatas.hu/bin/content/dload/erettsegi/feladatok_2017tavasz_emelt/e_mat_17maj_ut.pdf

címen.

M1. Az első megoldás az ABQ háromszögben felírt két szinusztétel segítségével határozza meg a PQ oldal hosszát (2. ábra).



2. ábra

M2. A második megoldásban egy szinusztétel és területszámítás segítségével érünk célt. $T_{ABC} - T_{ABQ} = T_{PQR}$; és a szabályos háromszög területéből az oldalának hossza már számítható.

M3. A harmadik megoldásban szinusztételek többszöri alkalmazásával meghatározzuk a CD , majd a d , c és b szakasz hosszakat, ebből a szabályos háromszög a oldalhossza már számítható.

A javítási útmutatóban a megoldások végén a következő megjegyzés szerepel: „Addíciós tételek felhasználásával bizonyítható, hogy $a = d = 2 \cdot \sin 10^\circ$.”

Jelen cikkben egyrészt elvégezzük ezt az addíciós tételek segítségével történő bizonyítást, másrészt további elemi geometriai bizonyításokat mutatunk a szabályos háromszög oldalát meghatározó $a = d$ egyenlőségre.

Megjegyzés. Az $a = d = 2 \cdot \sin 10^\circ$ **egyenlőség igazolása** addíciós tételek segítségével.

A bizonyításban felhasználjuk **M3.** részeredményeit:

$$d = \frac{\sin 20^\circ}{\sin 100^\circ} \quad \text{és} \quad a = \frac{\sin 60^\circ}{\sin 100^\circ} - \frac{\sin 20^\circ}{\sin 60^\circ} - \frac{\sin^2 20^\circ}{\sin 60^\circ \sin 100^\circ};$$

valamint alkalmazzuk a $\sin 100^\circ = \sin 80^\circ$ helyettesítést:

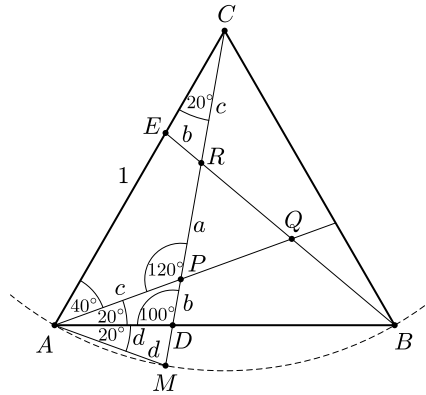
$$\begin{aligned}
 d &= \frac{\sin 20^\circ}{\sin 80^\circ} = \frac{2 \sin 10^\circ \cos 10^\circ}{\cos 10^\circ} = 2 \sin 10^\circ. \\
 a &= \frac{\sin^2 60^\circ - \sin^2 20^\circ - \sin 20^\circ \sin 80^\circ}{\sin 60^\circ \sin 80^\circ} = \\
 &= \frac{(\sin 60^\circ + \sin 20^\circ)(\sin 60^\circ - \sin 20^\circ) - \sin 20^\circ \sin 80^\circ}{\sin 60^\circ \sin 80^\circ} = \\
 &= \frac{2 \sin 40^\circ \cos 20^\circ \cdot 2 \sin 20^\circ \cos 40^\circ - \sin 20^\circ \sin 80^\circ}{\sin 60^\circ \sin 80^\circ} = \\
 &= \frac{\sin 80^\circ \sin 40^\circ - \sin 20^\circ \sin 80^\circ}{\sin 60^\circ \sin 80^\circ} = \frac{\sin 40^\circ - \sin 20^\circ}{\sin 60^\circ} = \frac{2 \sin 10^\circ \cos 30^\circ}{\sin 60^\circ} = \\
 &= 2 \sin 10^\circ.
 \end{aligned}$$

Ezzel igazoltuk az $a = d = 2 \cdot \sin 10^\circ$ egyenlőséget.

M4. A CER és CDA háromszögek hasonlóak (szögeik 20° , 60° , 100°), így $\frac{b}{c} = \frac{d}{1}$, azaz $b = cd$. A CD egyenes a C középpontú egység sugarú kört M -ben metszi, $AC = CM = 1$. $AMD \angle = 80^\circ$, így az MAD háromszög egyenlő szárú, és $AM = d$. Az MAD és ACM háromszögek hasonlóak (szögeik megegyeznek, 3. ábra), ebből $\frac{MD}{d} = \frac{d}{1}$, azaz $MD = d^2$. Az AP egyenes szögfelezője $MAC \angle$ -nek, így az MAC háromszögben felírható a szögfelező-tétel:

$$\frac{d^2 + b}{a + c} = \frac{d}{1}.$$

Innen $d^2 + b = da + dc$, amiből a fent kapott $b = cd$ miatt $d^2 = da$, azaz $d = a$ következik.

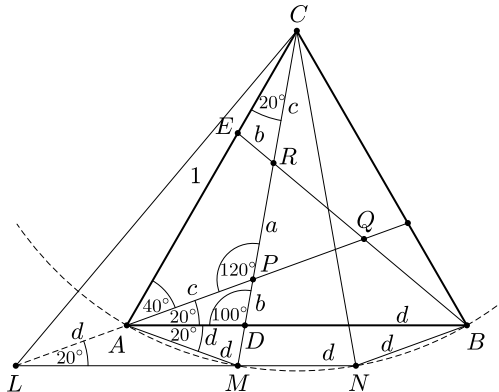


3. ábra

Megjegyzés. A $b = cd$ összefüggés az AMP háromszögben felírt szögfelező-tételből is megkapható, ha felhasználjuk az MAD és ACM háromszögek hasonlóságát:

$$\frac{DP}{PA} = \frac{b}{c} = \frac{DM}{MA} = \frac{MA}{AC} = \frac{d}{1}.$$

A következő bizonyítás előtt segédlépésként vegyük fel az egység sugarú körbe írt szabályos 18-szög oldalait. Az előző megoldás alapján $AM = MN = NB = d$ (4. ábra). A szabályos sokszög szimmetriatulajdonságából következik, hogy AB átlója és MN oldala párhuzamos.



4. ábra

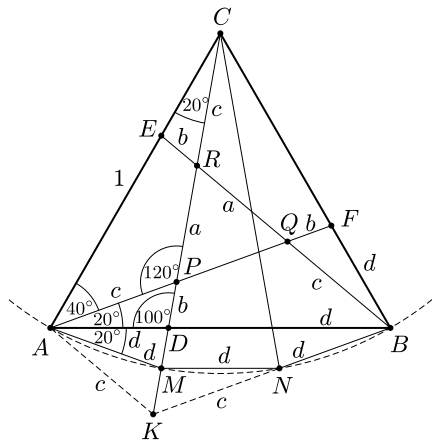
M5. Felmérjük PA -ra A -n túl $AL = d$ -t, és azt fogjuk igazolni, hogy $PL = PC$.

LAM egyenlő szárú háromszög, $ALM \sphericalangle = 20^\circ$, ezért LM és AB párhuzamosak, és az L, M, N pontok egy egyenesbe esnek. $LNBA$ egyenlő szárú trapéz ($LA = NB$) és nem húrtrapéz, ezért $LNBA$ paralelogramma, és így $LN = 1$. Az LNC háromszög egyenlő szárú,

$$NCL \sphericalangle = NLC \sphericalangle = \frac{180^\circ - 80^\circ}{2} = 50^\circ.$$

Továbbá $PCL \sphericalangle = PLC \sphericalangle (= 30^\circ)$, így $PL = PC$, azaz $c + d = a + c$, tehát $a = d$.

M6. Ismét szükségünk van a szabályos 18-szög oldalainak felvételére (M, N pontok). Felmérjük RP -re P -n túl $PK = c$ -t, és azt fogjuk igazolni, hogy $RK = KB$ (5. ábra).



5. ábra

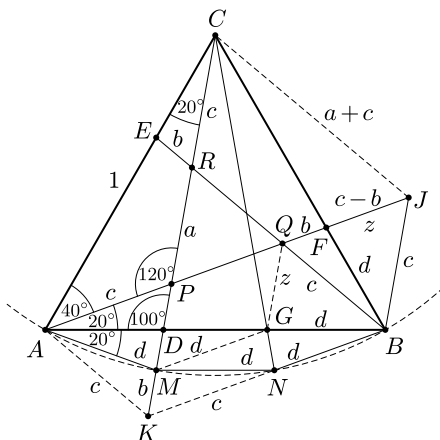
APK 60° -os szárszögű egyenlő szárú háromszög, ezért $AK = c$ és AK párhuzamos EB -vel. Így

$$KAM \sphericalangle = 60^\circ - 40^\circ = 20^\circ.$$

Az A és N tükrös helyzetű a KC egyenesre, ezért $KN = c$, $KNM \sphericalangle = 20^\circ$, és így K, N, B egy egyenesre esik. KRB szabályos háromszög (pl. $KR = RB$ és bezárt szögük 60°), így $KR = KB$, $a + c = c + d$, tehát $a = d$.

Megjegyzés. Ha már megkaptuk, hogy K, N, B egy egyenesre esik, akkor a megoldás befejezésére több lehetőség is kínálkozik. Például a KRB háromszög szabályossága abból is következik, hogy szögei 60° -osak; vagy azt is megmutathatjuk, hogy $AKBQ$ paralelogramma.

M7. Felvesszük a szabályos 18-szög oldalait és az előző megoldásbeli K pontot. Jelölje AB és CN metszéspontját G (6. ábra). Az $MNBG$ négyszög rombusz, mivel MN és BG oldalai párhuzamosak és egyenlők, és velük azonos hosszúságú az NB oldal is. Így $NB = MG = d$, valamint NB, MG és AF párhuzamosak ($FAB \sphericalangle = ABN \sphericalangle = 20^\circ$ váltószögek.)



6. ábra

Azt fogjuk igazolni, hogy $QGMP$ paralelogramma.

A QG szakasz hossza legyen z . Felmérjük AQ -ra Q -n túl $QJ = c$ -t, így a QBJ szabályos háromszöget kapjuk ($QJ = QB$ és a közbezárt szögük 60°). A GBQ és FBJ háromszögek egybevágók, mert c és d oldalai 40° -os szöget

Megjegyzések. 1. A megoldás során más utakat is követhetünk, bár ezek elvileg nem nagyon különböznek. Például a *QGMP* négy-szögről szögeinek kiszámításával is igazolhatjuk, hogy paralelogramma. Egy másik lehetőség: a *C* körüli +60°-os forgatás a *CAP* háromszöget a *CBJ* háromszögbe viszi, ezért *CPJ* szabályos háromszög. $PJ = JC = a + c$, és ekkor ráismerhetünk az *AKBQ* és *PKBJ* paralelogrammákra: az $AQ = a + c$, $KB = c + d$, $PJ = a + c$ szakaszok párhuzamosak és egyenlő hosszúak.

2. A *QJB* háromszög konstrukciójából és a *GBQ* és *FBJ* háromszögek egybevágóságából következik, hogy

A QJB háromszög konstrukciója nélkül is igazolhatjuk a fenti 2. megjegyzésből adódó **segédállítást**: az AQB háromszögben QG szögfelező.

M9. Forgassuk el a C pont körül pozitív irányban 20° -kal az ACD háromszöget, így az MCG háromszöget kapjuk, ahol $MG = AD = d$ (7. ábra).



Megjegyzés. Persze ismét követhetünk más utakat is. Például ha már tudjuk, hogy a $GBFQ$ húrnégyszög, akkor ebben az $FB = d$ húrhoz 60° -os kerületi szög tartozik, így ugyanekkora kerületi szög tartozik a $GB = d$ húrhoz is. Ezért $BQG \sphericalangle = 60^\circ$, és $PQG \sphericalangle = 60^\circ$ szintén. Innen pedig már következik, hogy $PMGQ$ paralelogramma.