

Második nap¹

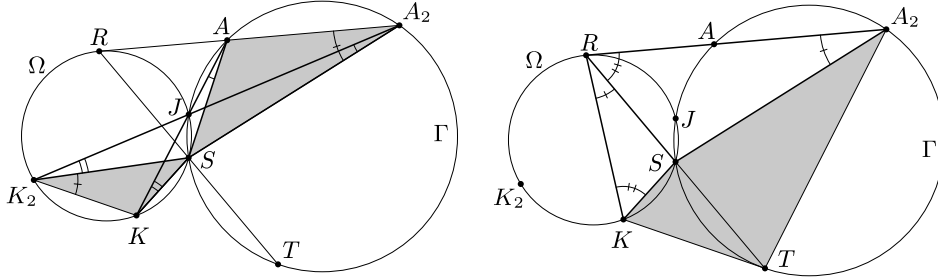
4. Legyenek R és S különböző pontok egy Ω körön, amikre RS nem átmérője a körnek. Legyen ℓ az Ω körhöz a R pontban húzott érintőegyenes. Legyen T az a pont, amire teljesül az, hogy S az RT szakasz felezőpontja. Legyen J egy olyan pont az Ω kör rövidebb RS ívén, amire teljesül az, hogy a JST háromszög Γ körülírt köre az ℓ egyenest két különböző pontban metszi. Legyen Γ és ℓ metszéspontjai közül az A pont az, ami közelebb van az R -hez. Az AJ egyenes Ω -val vett második metszéspontja legyen K . Bizonyítsuk be, hogy a KT egyenes érintője a Γ körnek.

Baran Zsuzsanna megoldása. Először is tegyük teljesebbé az ábrát a „másik metszéspontok” felvételével: legyen $\ell \cap \Gamma = \{A, A_2\}$ és legyen $A_2J \cap \Omega = \{J, K_2\}$. A megoldás során a szögeket irányítva értelmezzük.

A megoldás sok-sok hasonló háromszögpár észrevételén fog alapulni: az $SAK\Delta \sim SA_2K_2\Delta$, a $SAA_2\Delta \sim SKK_2\Delta$, a $RSK\Delta \sim A_2SR\Delta$, illetve az $SKT\Delta \sim STA_2\Delta$ hasonlóságokat fogjuk sorra belátni.

[Ezen a ponton érdemes lehet megpróbálni egyénileg befejezni a megoldást.]

$JK_2S\angle = JKS\angle$ és $SA_2J\angle = SAJ\angle$ (azonos íven nyugvó kerületi szögek), ezért $SAK\Delta$ és $SA_2K_2\Delta$ szögei megegyeznek, így $SAK\Delta \sim SA_2K_2\Delta$.



Ekkor $\frac{SA}{SA_2} = \frac{SK}{SK_2}$, továbbá $ASA_2\angle = KSK_2\angle$ (hiszen mindkettő $K_2SA_2\angle - K_2SA\angle = KSA\angle - K_2SA\angle$), emiatt $SAA_2\Delta \sim SKK_2\Delta$.

Ekkor $AA_2S\angle = KK_2S\angle = KRS\angle$. Az RA érinti Ω -t (és RS elválasztja A -t és K -t), ezért $ARS\angle = RKS\angle$. Így az $RSK\Delta$ és $A_2SR\Delta$ szögei megegyeznek, ezért $RSK\Delta \sim A_2SR\Delta$.

$TSK\angle = 180^\circ - KSR\angle = 180^\circ - RSA_2\angle = A_2ST\angle$, továbbá

$$\frac{ST}{KS} = \frac{SR}{KS} = \frac{SA_2}{RS} = \frac{SA_2}{TS}$$

(itt kihasználtuk, hogy S az RT szakasz felezőpontja), így $SKT\Delta \sim STA_2\Delta$.

Ez utóbbi hasonlóságból következik, hogy $STK\angle = SA_2T\angle$, ami éppen azt jelenti, hogy KT érinti a Γ kört. Készen vagyunk.

Erre a feladatra sokféle megoldás elképzelhető. Két további megoldási lehetőség címszavakban:

(1) Belátjuk, hogy $AT \parallel RK$, majd pedig, hogy $ARXT$ paralelogramma, melyben S az átlók felezőpontja. Itt X a KST kör és az RK egyenes másik metszéspontja.

(2) Invertálunk R középponttal, RS sugárral. Belátjuk, hogy a KT egyenes képe és Γ képe egymás tükörképei T' -re nézve. Ehhez belátjuk, hogy $RK'SA'_2$ paralelogramma. Az RK' és A'_2S párhuzamossága kijön RK és AT párhuzamosságából.

5. Adott egy $N \geq 2$ egész szám. $N(N+1)$ futballjátékos, akik között nincs két egyenlő magasságú, valahogyan felállnak egy sorban. Az edző ki akar hagyni ebből a sorból $N(N-1)$ játékost úgy, hogy a megmaradt $2N$ játékos alkotta sor játékosaira teljesüljön az alábbi N feltétel:

(1) senki nem áll a legmagasabb és a második legmagasabb játékos között,

(2) senki nem áll a harmadik legmagasabb és a negyedik legmagasabb játékos között,

⋮

(N) senki nem áll a két legalacsonyabb játékos között.

Bizonyítsuk be, hogy ez mindig megtehető.

¹ Az első nap feladatainak megoldását az októberi számban közzétük.

Borbényi Márton megoldása. Készítsünk N csoportot az alábbi módon: az első csoportban legyen a sor szerint első $N + 1$ ember, a másodikban a második $N + 1$ ember, és így tovább. Célunk, hogy minden csoportból pontosan 2 játékost válasszunk ki, így ők a megmaradó $2N$ emberrel egymás mellé kerülnek.

A következő algoritmust alkalmazzuk:

- elkezdjük jelölgetni a játékosokat magasság szerint csökkenő sorrendben;
- amint egy csoportban van két kijelölt focista, megállunk;
- elhagyjuk ebből a csoportból a két kijelölt játékoson kívül az összes embert, és minden más csoportból a csoport legmagasabb emberét;
- a két megjelölt játékoskal már nem kell foglalkoznunk, hiszen a megmaradtak között ők ketten a legmagasabbak, és senki nem áll már közöttük; marad $N - 1$ csoportunk, mindegyikben N focistával;
- ismételjük a fenti eljárást az eggyel kisebb létszámú, eggyel kevesebb csoportból álló sorra stb.

6. Egy egész számokból álló (x, y) rendezett párt primitív rácspontnak nevezünk, ha x és y legnagyobb közös osztója 1. Ha adott primitív rácspontok egy véges S halmaza, bizonyítsuk be, hogy van olyan n pozitív egész, és vannak olyan $a_0, a_1, \dots, a_n$ egészek, hogy minden $(x, y) \in S$ -beli pontra teljesül

$$a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 + \dots + a_{n-1}xy^{n-1} + a_ny^n = 1.$$

Williams Kada megoldása. Szeretnénk tehát egy olyan egész együtthatós nemkonstans homogén $f(x, y)$ polinomot találni, amire $f(x, y) = 1$, ha $(x, y) \in S$. (Homogénnek nevezünk egy többváltozós polinomot, ha benne minden tag fokszáma egyenlő.)

Az $f(x, y)$ polinom létezését $|S|$ szerinti indukcióval igazoljuk. Ehhez felhasználjuk az ún. Bézout-lemmát, ami szerint bármely x és y egész számok legnagyobb közös osztója előállítható $ax + by$ alakban, ahol $a, b \in \mathbb{Z}$. Az $|S| = 1$ esetből indulunk ki: ha $S = \{(x, y)\}$, akkor a Bézout-lemma szerint alkalmas $a, b \in \mathbb{Z}$ -re $f(x, y) = ax + by$ megfelel.

Tegyük fel ezután, hogy az $S = \{(a_1, b_1), \dots, (a_m, b_m)\}$ halmaz minden pontján $g(x, y) = 1$, és szeretnénk az (a_{m+1}, b_{m+1}) elemet hozzácsatolni. A Bézout-lemma szerint $Aa_{m+1} + Bb_{m+1} = 1$ alkalmas $A, B \in \mathbb{Z}$ -re. Mivel a

$$h(x, y) = \prod_{i=1}^m (a_iy - b_ix)$$

polinom értéke minden S -beli pontban 0, azért $C, K \in \mathbb{Z}$ -re az

$$f(x, y) = g(x, y)^K - C \cdot (Ax + By)^{K \cdot \deg g - m} h(x, y)$$

homogén polinom értéke minden S -beli pontban 1 (feltesszük, hogy $K \geq m$), míg

$$f(a_{m+1}, b_{m+1}) = g(a_{m+1}, b_{m+1})^K - C \cdot \underbrace{h(a_{m+1}, b_{m+1})}_{=: M}.$$

Azt állítjuk, hogy $g(a_{m+1}, b_{m+1})$ és $M = h(a_{m+1}, b_{m+1})$ egymáshoz relatív prím. Valóban, ha lenne közös p prímosztójuk, akkor $p \mid m$ miatt p osztója lenne az M valamelyik $a_i b_{m+1} - b_i a_{m+1}$ tényezőjének ($1 \leq i \leq m$). Vegyük észre, hogy ekkor a homogenitás miatt

$$\begin{aligned} b_i^{\deg g} g(a_{m+1}, b_{m+1}) &= g(b_i a_{m+1}, b_i b_{m+1}) \equiv g(a_i b_{m+1}, b_i b_{m+1}) = \\ &= b_{m+1}^{\deg g} g(a_i, b_i) = b_{m+1}^{\deg g} \pmod{p}, \end{aligned}$$

s így $p \mid g(a_{m+1}, b_{m+1})$ -ből $p \mid b_{m+1}$ következik. Hasonlóan kapjuk, hogy $p \mid a_{m+1}$. Ez viszont ellentmond annak, hogy a_{m+1} és b_{m+1} relatív prím.

Ha $M \neq 0$, akkor a relatív prímség miatt $g(a_{m+1}, b_{m+1})^{\varphi(|M|)} \equiv 1 \pmod{M}$ az Euler–Fermat-tétel szerint, így pl. $K = m\varphi(|M|)$ választással alkalmas $C \in \mathbb{Z}$ -re $f(a_{m+1}, b_{m+1}) = 1$ biztosítható. Ha pedig $M = 0$, akkor a 0-hoz való relatív prímség miatt $g(a_{m+1}, b_{m+1}) = \pm 1$, s így $K = 2$ és $C = 0$ megfelel.

Tehát minden esetben biztosítottuk, hogy $f(a_{m+1}, b_{m+1}) = 1$ is teljesüljön. Tehát az indukciós lépést befejeztük, az indukció teljes.

Megjegyzés. A feladat általánosítása volt a 2017. szeptemberi számban megjelent **A. 703.** feladat. Egy további megoldási módszer olvasható a

<https://www.komal.hu/verseny/feladat.cgi?a=feladat&f=A703&l=hu>

címen.