I. rész

1. *a) Egy gyorsvonat két város közötti útját a menetrend szerint* 80 km/h *átlagsebességgel szokta megtenni. A vonat azonban egyik nap – pályafelújítási munkák miatt – az útja első egyharmadán csak* 40 km/h *átlagsebességet ért el. Az út második kétharmad részét a menetrend szerint előírt* 80 km/h *átlagsebességgel tette meg. Az út befejező egyharmad részén – hogy csökkentse a késést – gyorsított, így ezt a szakaszt* 100 km/h *átlagsebességgel tette meg. A célállomásra így is* 12 *perc késéssel érkezett. Hány* km *a távolság a két város között?*

b) Egy vasúti jegy árát először p százalékkal felemelték, majd később $2p$ százalékkal csökkentették. Így a jegy eredeti árához képest végül 19,5 *százalékkal olcsóbb lett. Határozzuk meg p értékét.* *(13 pont)*

Megoldás. *a)* A két város közti távolságot jelölje s. Az adatok alapján a következő egyenlet írható fel (a távolságokat km-ben, az időt órában, a sebességet km/h-ban mérjük):

$$\frac{s}{80}+0{,}2=\frac{\frac{1}{3}s}{40}+\frac{\frac{1}{3}s}{80}+\frac{\frac{1}{3}s}{100}.$$

1200-zal beszorozva az egyenletet:

$$15s+240=10s+5s+4s,$$

ahonnan $s=60$, a két város távolsága tehát 60 km.

Ellenőrzés: A vonat a menetrend szerinti 80 km/h átlagsebességgel 45 perc alatt teszi meg a két város közti utat. Ezen az úton az első 20 km-t (40 km/h átlagsebességgel) 30 perc, a második 20 km-t (80 km/h átlagsebességgel) 15 perc, az utolsó 20 km-t pedig (100 km/h átlagsebességgel) 12 perc alatt tette meg, így összesen valóban 12 perc késéssel (57 perc alatt) ért a célállomásra.

b) Az adatok alapján felírható egyenlet a jegy árának változására:

$$\left(1+\frac{p}{100}\right)\left(1-\frac{2p}{100}\right)=0{,}805.$$

10 000-rel beszorozva és rendezve:

$$0=2p^2+100p-1950.$$

Ennek a másodfokú egyenletnek a gyökei $p_1=15$ és $p_2=-65$. A negatív gyök nem ad megoldást, tehát $p=15$.

Ellenőrzés: Egy 15 százalékos emelés után egy 30 százalékos csökkentés $1{,}15\cdot 0{,}7=0{,}805$-szeresére változtatja az eredeti árat, ami valóban 19,5 százalékos csökkenésnek felel meg.

2. *a) Határozzuk meg az $(x+1)^2(2+cx)^4$ kifejezésben c értékét, ha a műveletek elvégzésével nyert polinomban az elsőfokú tag együtthatója -64.*

b) Határozzuk meg az A, B és C kijelentések lehetséges logikai értékeit, ha tudjuk, hogy az $(A\wedge B)\to(\neg B\vee C)$ állítás logikai értéke hamis. *(13 pont)*

Megoldás. *a)* $(x+1)^2=x^2+2x+1$. Elsőfokú tagot kapunk, ha az innen kapott $2x$-et szorozzuk a $(2+cx)^4$ hatvány konstans tagjával, vagy az innen kapott 1-et szorozzuk a hatvány elsőfokú tagjával.

A binomiális tétel szerint $(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$, tehát

$$(2+cx)^4=16+4\cdot 8\cdot cx+6\cdot 4\cdot c^2x^2+\dots.$$

Ezért a szorzatban az elsőfokú tag együtthatója $2\cdot 16+1\cdot 32c=32+32c=-64$, ahonnan $c=-3$.

b) A következtetés akkor és csak akkor hamis, ha az előzmény igaz és a következmény hamis. Tehát $(A\wedge B)=i$-nek és $(\neg B\vee C)=h$-nak kell egyszerre teljesülnie.

Ha $(A\wedge B)=i$, akkor az A és B kijelentések logikai értéke is igaz. Ha $B=i$, akkor $\neg B=h$. $(\neg B\vee C)=h$ akkor teljesül, ha $\neg B$ és C logikai értéke is hamis. Már láttuk, hogy $\neg B=h$, ezért kell, hogy $C=h$ is teljesüljön.

A feladatban szereplő következtetés logikai értéke tehát egyetlen esetben lesz hamis: $A=i$, $B=i$, $C=h$.

3. *a) Három teljes gráf közül az elsőnek* 5*-tel kevesebb, a másodiknak* 6*-tal több pontja van, mint a harmadiknak. A két kisebb pontszámú gráfnak együtt összesen annyi éle van, mint a legnagyobb pontszámúnak. Határozzuk meg a három teljes gráf pontjainak számát.*

b) Egy gráfban cseresznyének *nevezzük a két egymáshoz csatlakozó élből álló részgráfot. Igazoljuk, hogy egy hétpontú teljes gráfban a cseresznyék száma megegyezik a négypontú körök számával.* *(13 pont)*

Megoldás. *a)* A legkisebb pontszámú gráf pontjainak számát k-val jelölve a megoldandó egyenlet:

$$\frac{k(k-1)}{2}+\frac{(k+5)(k+4)}{2}=\frac{(k+11)(k+10)}{2},$$

$$\left(k^2-k\right)+\left(k^2+9k+20\right)=k^2+21k+110,$$

$$k^2-13k-90=0,$$

$k = 18$ vagy $k = -5$. Ez utóbbi nem megoldása a feladatnak.

A három teljes gráfnak 18, 23, illetve 29 pontja van.

Ellenőrzés: K_{18}-nak 153, K_{23}-nak 253, K_{29}-nek 406 éle van, és valóban $153 + 253 = 406$.

b) I. megoldás. Egy cseresznye három pontját $\binom{7}{3} = 35$-féleképpen választhatjuk ki. A három pont közül 3-féleképpen választható ki a cseresznye csúcsa. A hétpontú teljes gráfban a cseresznyék száma tehát $35 \cdot 3 = 105$.

Egy négypontú kör pontjait $\binom{7}{4} = 35$-féleképpen választhatjuk ki. Négy adott pont esetén 3-féleképpen választhatjuk ki azt, hogy közülük melyik 2–2 pont legyen a körben „szemben". A négypontú körök száma tehát $35 \cdot 3 = 105$.

K_7-ben tehát valóban megegyezik a cseresznyék és a négypontú körök száma.

II. megoldás. Kölcsönösen egyértelmű hozzárendelést adunk a hétpontú teljes gráfban található cseresznyék és a négypontú körök között.

Számozzuk meg a gráf csúcsait 1-től 7-ig. Egy tetszőlegesen kiválasztott négypontú kör pontjai legyenek $1 \le a < b < c < d \le 7$, a körben nem szereplő pontok pedig $1 \le e < f < g \le 7$. Három olyan négypontú kör van, mely az a, b, c, d pontokat tartalmazza ($abcda$, $abdca$ és $acbda$), és három cseresznye, mely az e, f, g pontokat tartalmazza (efg, egf és gef). Ezt a 3-3 kört és cseresznyét rendre feleltessük meg egymásnak.

Ezzel minden négypontú körhöz pontosan egy cseresznyét, és minden cseresznyéhez pontosan egy kört rendeltünk, tehát a négypontú körök és a cseresznyék száma valóban egyenlő.

4. *Egy nyolc valós számból álló adatsor öt eleme ismert:* 5; 5,5; 10; 12,5 *és* 15,5. *A maradék három elem elveszett, de tudjuk, hogy legalább az egyik egész szám, és a három elem közül kettő egyforma volt. Azt is tudjuk, hogy a teljes adatsor átlaga* 10,5, *szórása pedig* 3,5 *volt. Határozzuk meg a hiányzó három elem értékét.* (*12 pont*)

Megoldás. Legyen a hiányzó elemek értéke a, a és b. Ekkor az átlag alapján $\frac{5 + 5{,}5 + 10 + 12{,}5 + 15{,}5 + 2a + b}{8} = 10{,}5$, ahonnan $2a + b = 35{,}5$. A szórás alapján

$$\sqrt{\frac{(5-10{,}5)^2 + (5{,}5-10{,}5)^2 + (10-10{,}5)^2 + (12{,}5-10{,}5)^2 + (15{,}5-10{,}5)^2 + 2(a-10{,}5)^2 + (b-10{,}5)^2}{8}} =$$

$$= \sqrt{\frac{84{,}5 + 2(a-10{,}5)^2 + (b-10{,}5)^2}{8}} = 3{,}5,$$

ahonnan $2(a-10{,}5)^2 + (b-10{,}5)^2 = 13{,}5$. ahonnan $2(a-10{,}5)^2 + (b-10{,}5)^2 = 13{,}5$.

Az első egyenletből $b = (35{,}5 - 2a)$-t ebbe behelyettesítve:

$$2(a-10{,}5)^2 + (25-2a)^2 = 13{,}5.$$

Rendezve:

$$6a^2 - 142a + 832 = 0.$$

Ennek megoldásai: $a_1 = 13$ és $a_2 = \frac{32}{3}$, melyekhez tartozó b értékek rendre $b_1 = 9{,}5$ és $b_2 = \frac{85}{6}$.

A második esetben nem kapunk megoldást, mert a három hiányzó érték egyike sem egész szám, tehát a hiányzó három adat 13, 13 és 9,5.

Ellenőrzés: a nyolc számból álló adatsor átlaga valóban 10,5, szórása pedig valóban 3,5.

II. rész

5. *a) Egy háromszög egyik oldala* 7 cm *hosszú, az egyik ezen fekvő szög* 18 *fokos, az oldallal szemközti szög pedig* 108 *fokos. Határozzuk meg a háromszög területét és a háromszögbe írható kör sugarát.*

b) Egy vízszintes terepen álló torony talppontját megközelíteni nem tudjuk. A torony magasságára árnyékának hosszából szeretnénk következtetni, de a torony megközelíthetetlensége miatt az árnyék pontos hosszát sem tudjuk megmérni.

Ezért megjelöljük a torony árnyékának végpontját akkor, amikor a Nap sugarai $75°$*-os szögben érik a talajt. Néhány órával később, amikor a Nap sugarai már csak* $60°$*-os szögben érik a talajt, a torony árnyékát ennél* 8 *méterrel hosszabbnak találjuk.*

Milyen magas a torony? (*16 pont*)

Megoldás. a) Jelölje a háromszög 18 fokos szöggel szemközti oldalát a, az 54 fokos szöggel szemközti oldalát pedig b. A háromszög ismeretlen oldalainak hosszát szinusztétellel határozzuk meg:

$$\frac{a}{7}=\frac{\sin 18^\circ}{\sin 108^\circ},\quad \text{ahonnan}\quad a\approx 2{,}27\ \text{cm},$$
$$\frac{b}{7}=\frac{\sin 54^\circ}{\sin 108^\circ},\quad \text{ahonnan}\quad b\approx 5{,}95\ \text{cm}.$$

A háromszög területe:

$$T=\frac{7\cdot a\cdot\sin 54^\circ}{2}\approx 6{,}44\ \text{cm}^2$$

(a két tizedesjegyre kerekített értékével számolva 6,43 cm^2).

A beírható kör r sugara a $T=rs$ képlet segítségével határozható meg, ahol $s=\dfrac{K}{2}\approx 7{,}61$ cm. Innen $r=\dfrac{T}{s}\approx$ 0,85 cm.

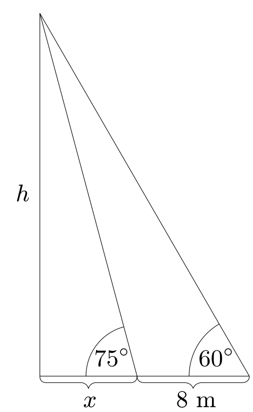
b) Jelölje a torony magasságát h, árnyékának hosszát az első mérés alkalmával x.

$$\operatorname{tg} 75^\circ=\frac{h}{x}\quad\text{és}\quad \operatorname{tg} 60^\circ=\frac{h}{x+8},$$
$$h=\operatorname{tg} 75^\circ\cdot x=\operatorname{tg} 60^\circ\cdot(x+8).$$

Ebből (kihasználva, hogy $\operatorname{tg} 75^\circ=2+\sqrt{3}$),

$$x=\frac{8\cdot\operatorname{tg} 60^\circ}{\operatorname{tg} 75^\circ-\operatorname{tg} 60^\circ}\big(=4\sqrt{3}\big)\approx 6{,}9\ \text{méter},$$

majd $h=\operatorname{tg} 75^\circ\cdot x\big(=12+8\sqrt{3}\big)\approx 25{,}9$ méter.



Másképp:

$$x=\frac{h}{\operatorname{tg} 75^\circ},\quad\text{majd ezzel}\quad \operatorname{tg} 60^\circ=\frac{h}{\frac{h}{\operatorname{tg} 75^\circ}+8}.$$

Ebből

$$h=\frac{8\cdot\operatorname{tg} 60^\circ}{1-\frac{\operatorname{tg} 60^\circ}{\operatorname{tg} 75^\circ}}\big(=12+8\sqrt{3}\big)\approx 25{,}9\ \text{méter}.$$

6. *Öt osztálytárs: Anna, Balázs, Cili, Dénes és Elemér négynapos közös nyaralásra mennek. Mind a négy napon sorsolással választják ki maguk közül azt az egy embert, akinek aznap reggel be kell vásárolnia (egy-egy emberre akár többször is sor kerülhet).*

a) Mekkora annak a valószínűsége, hogy mind a négy napon más-más ember megy bevásárolni?

b) Mekkora annak a valószínűsége, hogy mind a négy napon ugyanannak az embernek kell bevásárolnia?

c) Mekkora annak a valószínűsége, hogy Annát a négy nap alatt legalább kétszer kisorsolják?

d) Mekkora annak a valószínűsége, hogy a nyaralás során két ember intézi mind a négy bevásárlást (mindkettőre legalább egyszer sor kerül)? *(16 pont)*

Megoldás. a) A kérdezett valószínűséget a kedvező esetek és az összes eset számának hányadosaként kapjuk:

$$p=\frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{5^4}=0{,}192.$$

b) Annak a valószínűsége, hogy pl. Annát sorsolják ki mind a négy napon, $\left(\frac{1}{5}\right)^4$. Mivel bármelyik osztálytárs esetén ugyanennyi ez a valószínűség, és ezek egymást kizáró események, ezért

$$p = 5 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^4 = \frac{1}{125} = 0{,}008.$$

Másképp: Az első nap bárkit kisorsolhatnak. Annak a valószínűsége, hogy a hátralevő három napon is ugyanezt az embert fogják kisorsolni:

$$p = \left(\frac{1}{5}\right)^3 = \frac{1}{125} = 0{,}008.$$

c) Binomiális eloszlást használunk.

$$\begin{aligned}&P(\text{legalább 2-szer kisorsolják Annát}) =\\ &= 1 - P(\text{0-szor}) - P(\text{1-szer}) = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^4 - \binom{4}{1}\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{4}{5}\right)^3 =\\ &= 1 - 0{,}4096 - 0{,}4096 = 0{,}1808 \left(= \frac{113}{625}\right).\end{aligned}$$

d) Először kiszámítjuk annak a valószínűségét, hogy mind a négy bevásárlásra Annát és Balázst sorsolják ki. A négy bevásárlás közül Anna intézhet egyet, kettőt vagy hármat, a többit pedig Balázs.

$$\begin{aligned}P(3A, 1B) = P(1A, 3B) &= \binom{4}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^4 = \frac{4}{625} = 0{,}0064,\\ P(2A, 2B) &= \binom{4}{2}\left(\frac{1}{5}\right)^4 = \frac{6}{625} = 0{,}0096.\end{aligned}$$

Tehát

$$P(A \text{ és } B \text{ vásárol minden nap}) = \frac{14}{625} = 0{,}0224.$$

Mivel hatféleképpen választható ki az a két ember, aki mind a négy bevásárlást intézi, azért a kérdezett valószínűség az előbbi érték hatszorosa:

$$P(\text{ketten vásárolnak minden nap}) = \frac{84}{625} = 0{,}1344.$$

7. *a*) *Határozzuk meg az* $a_n = \frac{4n-1}{n}$ *sorozat legnagyobb alsó és legkisebb felső korlátját.*

b) *Egy számtani sorozat első* 11 *tagjának összege* 660. *A sorozat első tagja, hatodik tagja, és első nyolc tagjának összege (ebben a sorrendben) egy mértani sorozat három egymást követő tagját adja. Határozzuk meg a számtani sorozat első tagját és differenciáját.* (*16 pont*)

Megoldás. *a*) $a_n = \frac{4n-1}{n} = 4 - \frac{1}{n}$. Mivel az $\frac{1}{n}$ sorozat szigorúan monoton csökken és 0-hoz tart, ezért az $a_n = 4 - \frac{1}{n}$ sorozat szigorúan monoton nő és 4-hez tart, tehát legkisebb felső korlátja a 4, legnagyobb alsó korlátja pedig az első tagja: $a_1 = 4 - \frac{1}{1} = 3$.

b) Az első 11 tag összege: $\frac{(2a_1 + 10d) \cdot 11}{2} = 660$, innen

$$2a_1 + 10d = 120, \tag{1}$$

azaz $a_1 = 60 - 5d$.

A mértani sorozatból:

$$\begin{gathered}\frac{a_1 + 5d}{a_1} = \frac{\frac{(2a_1+7d)\cdot 8}{2}}{a_1 + 5d},\\ a_1^2 + 10a_1d + 25d^2 = 8a_1^2 + 28a_1d,\\ 0 = 7a_1^2 + 18a_1d - 25d^2.\end{gathered}$$

($*$) Az a_1-re kapott összefüggést ide beírva:

$$\begin{aligned}0 &= 7(60-5d)^2 + 18(60-5d)d - 25d^2 =\\ &= \left(25\,200 - 4200d + 175d^2\right) + \left(1080d - 90d^2\right) - 25d^2 =\\ &= 60d^2 - 3120d + 25\,200 = 60\left(d^2 - 52d + 420\right).\end{aligned}$$

Innen $d = 10$ vagy 42.

Ellenőrzés: Az első esetben $a_1 = 10$, $a_6 = 60$ és $S_8 = 360$ valóban egy mértani sorozat ($q = 6$) három szomszédos tagja, továbbá $S_{11} = 660$.

A második esetben $a_1 = -150$, $a_6 = 60$ és $S_8 = -24$ szintén valóban egy mértani sorozat ($q = -0{,}4$) három szomszédos tagja, továbbá $S_{11} = 660$.

II. megoldás a ($*$)-gal jelölt résztől kezdve: d^2-tel osztva legyen $c = \frac{a_1}{d}$, ezzel $0 = 7c^2 + 18c - 25$. Innen $c = 1$ vagy $-\frac{25}{7}$, azaz $a_1 = d$ vagy $a_1 = -\frac{25}{7}d$.

Ezt visszaírva az (1) egyenletbe:

vagy $2a_1 + 10d = 12d = 120$, ahonnan $d = 10$ és $a_1 = 10$;

vagy $2a_1 + 10d = \frac{20}{7}d = 120$, ahonnan $d = 42$ és $a_1 = -150$.

III. megoldás: Az első 11 tag összegéből kapjuk, hogy $a_1 + 5d = 60$, ez éppen a számtani sorozat 6. tagja. Ezzel a mértani sorozatból:

$$\frac{60}{60-5d} = \frac{\frac{(120-3d)\cdot 8}{2}}{60},$$
$$3600 = (60-5d)(480-12d),$$
$$0 = 60d^2 - 3120d + 25\,200 = 60\big(d^2 - 52d + 420\big).$$

Innen pedig az 1. megoldásnál látottak szerint folytatható a gondolatmenet.

8. *a) Határozzuk meg n értékét úgy, hogy az alábbi egyenlőség teljesüljön:*

$$\int_2^n 2x + 5\,\mathrm{d}x = \int_1^7 10n - 2x - 3x^2\,\mathrm{d}x.$$

b) Mekkora területű síkidomot vág ki az $f(x) = \frac{4}{(x+1)^2} - 1$ függvény grafikonja az első síknegyedből?

c) Írjuk fel az f grafikonjához az 1 abszcisszájú pontjában húzott érintőegyenes egyenletét. (*16 pont*)

Megoldás. *a*) Elvégezzük az egyenlet két oldalán kijelölt integrálásokat a Newton–Leibniz-tétel alapján:

$$\big[x^2 + 5x\big]_2^n = \big[10nx - x^2 - x^3\big]_1^7,$$
$$\big(n^2 + 5n\big) - (4 + 10) = (70n - 49 - 343) - (10n - 1 - 1),$$
$$n^2 - 55n + 376 = 0.$$

Innen $n_1 = 47$ vagy $n_2 = 8$.

Mindkét n-re valóban teljesül az egyenlőség: az első esetben 2430, a második esetben pedig 90 az integrálok értéke az egyenlet mindkét oldalán.

b) Megkeressük, hogy az f grafikonja hol metszi az x tengely pozitív félegyenesét: $\frac{4}{(x+1)^2} - 1 = 0$, ebből (az $x > 0$ feltétel mellett) $x = 1$.

Mivel az f grafikonja az y tengelyt metszi (+3-ban), ezért az első síknegyedből levágott síkidom területét az

$$\int_0^1 \frac{4}{(x+1)^2} - 1\,\mathrm{d}x$$

integrál értéke adja meg:

$$T = \int_0^1 \frac{4}{(x+1)^2} - 1\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{4}{x+1} - x\right]_0^1 = (-3) - (-4) = 1.$$

A kérdéses síkidom tehát éppen egységnyi területű.

c) Az érintőegyenes meredekségét az f deriváltfüggvényének az $x = 1$-ben felvett értéke adja:

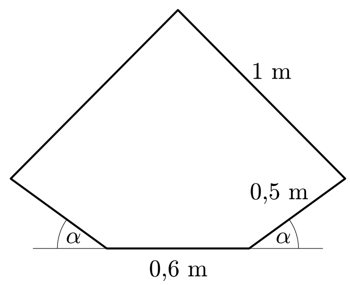
$$f'(x) = -\frac{8}{(x+1)^3}, \quad \text{tehát} \quad f'(1) = -1.$$

Az 1 abszcisszájú pont második koordinátája:

$$f(1) = \frac{4}{(1+1)^2} - 1 = 0.$$

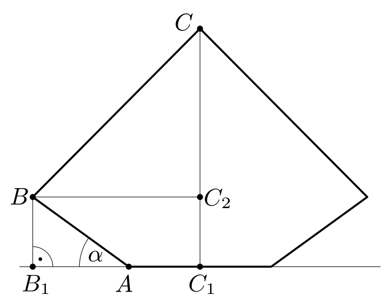
Az érintőegyenes egyenlete $y = 1 - x$.

9. *Egy villanymozdony áramszedőjét két ponton rögzítették a mozdony tetejéhez, ezek távolsága 0,6 méter. Az áramszedő négy, egymáshoz csatlakozó egyenes szakaszból áll. A két rövidebb szakasz 0,5 méter, a két hosszabb szakasz 1 méter hosszú (lásd az ábrát). Az áramszedő egyes szakaszai a mozdony tetejéhez és egymáshoz képest csuklósan szabadon elmozdulhatnak. Jelölje $h(\alpha)$ az áramszedő legmagasabb pontjának magasságát a mozdony tetejéhez képest akkor, amikor mindkét rövidebb ág α szöget zár be a mozdony tetejének síkjával.*



a) Igazoljuk, hogy $h(\alpha)=\sqrt{1-(0{,}3+0{,}5\cos\alpha)^2}+0{,}5\sin\alpha$.
b) Milyen magasan lesz az áramszedő legmagasabb pontja $\alpha=25^\circ$ *esetén?*
c) Mekkora α *szög esetén lesz az áramszedő legmagasabb pontja éppen 1 méter magasságban?* (*16 pont*)

Megoldás. *a*) Az *ábra* jelöléseit használjuk.



Az áramszedő egyik rövidebb ága $AB=0{,}5$ (m), ez az A pontban csatlakozik a mozdony tetejéhez. A B pont merőleges vetülete a mozdony tetősíkjára B_1. Ekkor $BAB_1\sphericalangle=\alpha$, $AB_1=0{,}5\cos\alpha$, $BB_1=0{,}5\sin\alpha$.

Az áramszedő hosszabbik ága $BC=1$ (m). A C pont merőleges vetülete a mozdony tetősíkjára C_1. A B pont merőleges vetülete a CC_1 egyenesre C_2.

$$h(\alpha)=CC_1=CC_2+C_2C_1=\sqrt{1-C_2B^2}+BB_1=\sqrt{1-(C_1A+AB_1)^2}+0{,}5\sin\alpha=$$
$$=\sqrt{1-(0{,}3+0{,}5\cos\alpha)^2}+0{,}5\sin\alpha,$$

ami éppen a bizonyítandó volt.

b) $\alpha=25^\circ$ esetén

$$h(\alpha)=\sqrt{1-(0{,}3+0{,}5\cos 25^\circ)^2}+0{,}5\sin 25^\circ\approx$$
$$\approx\sqrt{1-(0{,}3+0{,}5\cdot 0{,}9063)^2}+0{,}5\cdot 0{,}4226\approx 0{,}869,$$

tehát ebben az esetben az áramszedő csúcs kb. 87 cm magasan lesz a mozdony tetejéhez képest.

c) Megoldandó a $\sqrt{1-(0{,}3+0{,}5\cos\alpha)^2}+0{,}5\sin\alpha=1$ egyenlet. A négyzetre emelést elvégezve és átrendezve:

$$\sqrt{0{,}91-0{,}3\cos\alpha-\frac{\cos^2\alpha}{4}}=1-0{,}5\sin\alpha.$$

Emeljük négyzetre most az egyenletet:

$$0{,}91-0{,}3\cos\alpha-\frac{\cos^2\alpha}{4}=1-\sin\alpha+\frac{\sin^2\alpha}{4}.$$

Átrendezve:

$$\sin\alpha - 0{,}09 - \left(\frac{\sin^2\alpha}{4} + \frac{\cos^2\alpha}{4}\right) = 0{,}3\cos\alpha.$$

Kihasználva, hogy $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, kapjuk, hogy $\sin\alpha - 0{,}34 = 0{,}3\cos\alpha$.

($*$) Ismét négyzetre emelünk:

$$\sin^2\alpha - 0{,}68\sin\alpha + 0{,}1156 = 0{,}09\cos^2\alpha.$$

$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$ helyettesítéssel:

$$1{,}09\sin^2\alpha - 0{,}68\sin\alpha + 0{,}0256 = 0,$$

$$\sin\alpha_{1,2} \approx \frac{0{,}68 \pm \sqrt{0{,}68^2 - 4\cdot 1{,}09\cdot 0{,}0256}}{2\cdot 1,09} = \frac{0{,}68 \pm \sqrt{0{,}350\,784}}{2{,}18} \approx \frac{0{,}68 \pm 0{,}5923}{2{,}18}.$$

Azaz $\sin\alpha \approx 0{,}5836$, tehát $\alpha \approx 35{,}705^\circ$, vagy $\sin\alpha \approx 0{,}0402$, tehát $\alpha \approx 2{,}306^\circ$.

Ez utóbbi a második négyzetre emelésnél keletkezett hamis gyök (a négyzetre emelés előtt az egyenlet bal oldala negatív, a jobb oldala pozitív). Előbbi érték viszont valóban megoldása a feladatnak, hiszen könnyű meggyőződni róla, hogy ebben az esetben mindkét négyzetre emelésnél az egyenlőség mindkét oldala pozitív.

Tehát $\alpha \approx 36^\circ$ esetén lesz a mozdony áramszedőjének csúcsa éppen 1 méter magasan.

II. megoldás a ($*$)-gal jelölt résztől kezdve:

$$\sin\alpha - 0{,}3\cos\alpha = 0{,}34.$$

$\sqrt{1^2 + 0{,}3^2} = \sqrt{1{,}09}(\approx 1{,}044)$-gyel osztva:

$$\frac{1}{\sqrt{1{,}09}}\sin\alpha - \frac{0{,}3}{\sqrt{1{,}09}}\cos\alpha = \frac{0{,}34}{\sqrt{1{,}09}}.$$

Mivel $\dfrac{1}{\sqrt{1{,}09}} \approx \cos 16{,}699^\circ$ és $\dfrac{0{,}3}{\sqrt{1{,}09}} \approx \sin 16{,}699^\circ$, ezért ez (az ismert addíciós tétel segítségével) így írható:

$$\sin\alpha\cos 16{,}699^\circ - \cos\alpha\sin 16{,}699^\circ = \sin(\alpha - 16{,}699^\circ) = \frac{0{,}34}{\sqrt{1{,}09}} \approx \sin 19{,}006^\circ,$$

ahonnan (mivel α hegyesszög) $\alpha - 16{,}699^\circ \approx 19{,}006^\circ$, azaz $\alpha \approx 35{,}705^\circ$.