

A hagyományoknak megfelelően ebben az évben is közöljük a nyári matematikai diákolimpia feladatainak a megoldásait; lényegében úgy, ahogyan a legilletékesebbek, a magyar csapat tagjai leírták. Közreműködésüket köszönjük és ezúton is gratulálunk eredményeikhez.

A szerkesztőség

Első nap¹

1. Minden $a_0 > 1$ egész számra definiáljuk az $a_0, a_1, a_2, \dots$ sorozatot a következőképpen. Minden $n \geq 0$ -ra legyen

$$a_{n+1} = \begin{cases} \sqrt{a_n}, & \text{ha } \sqrt{a_n} \text{ egész szám,} \\ a_n + 3 & \text{különben.} \end{cases}$$

Határozzuk meg az összes olyan a_0 értéket, amihez van olyan A szám, amire $a_n = A$ teljesül végtelen sok n -re.

Gáspár Attila megoldása.

1. állítás: Ha $a_0 \equiv 0 \pmod{3}$, akkor a sorozat tartalmazza a 3-at.

Bizonyítsunk a_0 szerinti teljes indukcióval. Ha $a_0 = 3$, akkor az állítás triviális. Ha $a_0 = 6$, akkor $a_1 = 9$, és $a_2 = 3$, ezért az állítás igaz. A továbbiakban feltételezhetjük, hogy $a_0 \geq 9$.

Látható, hogy az $a_0, a_0 + 3, a_0 + 6, \dots$ számtani sorozatban van az első négyzetszám a sorozatból. A sorozat összes eleme 3-mal osztható, ezért ez a négyzetszám $x^2 = (3k)^2$ alakú. Végtelen sok 3-mal osztható négyzetszám van, ezért a sorozat tartalmaz négyzetszámot. A $(3(k-1))^2 = (x-3)^2$ nem szerepel a sorozatban, ezért $a_0 > (x-3)^2 = x^2 - 6x + 9 = x(x-6) + 9 > x + 9 > x$. Az x^2 szerepel a sorozatban, ezért az x is szerepel. $x < a_0$, ezért az indukciós feltevés miatt az állítás igaz.

Látható, hogy ha $a_0 = 3$, akkor $a_1 = 6$, $a_2 = 9$ és $a_3 = 3$. Ha $3 \mid a_0$, akkor az 1. állítás miatt a 3 végtelen sokszor szerepel a sorozatban.

2. állítás: Ha $a_0 \equiv 1 \pmod{3}$, akkor a sorozat tartalmaz $3k+2$ alakú számot.

Bizonyítsunk a_0 szerinti teljes indukcióval. Ha $a_0 = 1$, akkor $a_1 = 4$, és $a_2 = 2$. Ebből látható, hogy az állítás $a_0 = 4$ esetén is igaz. A továbbiakban feltételezhetjük, hogy $a_0 \geq 7$.

Látható, hogy az $a_0, a_0 + 3, a_0 + 6, \dots$ számtani sorozatban van az első négyzetszám a sorozatból. Ilyen biztosan van, mert végtelen sok $3k+1$ alakú négyzetszám van. Legyen ez a négyzetszám x^2 . Az x^2 szerepel a sorozatban, ezért az x is szerepel.

Ha $x = 3k+2$ alakú, akkor az állítás igaz.

Ha $x = 3k+1$ alakú, akkor a $(3k-1)^2 = (x-2)^2$ nem szerepel a sorozatban, ezért $a_0 > (x-2)^2 = x^2 - 4x + 4 = x(x-4) + 4 > x + 4 > x$. Az indukciós feltevés miatt az állítás igaz.

3. állítás: Ha $a_0 \equiv 2 \pmod{3}$, akkor a sorozat szigorúan monoton növekvő.

Egy négyzetszám nem lehet $3k+2$ alakú. Így az $a_0, a_0 + 3, a_0 + 6, \dots$ sorozat nem tartalmaz négyzetszámot. Ekkor $a_1 = a_0 + 3$, $a_2 = a_0 + 6$, $\dots$, $a_n = a_0 + 3n$. Ezzel az állítást igazoltuk.

Látható, hogy ha a_0 nem osztható 3-mal, akkor a 2. és 3. állítás miatt a sorozat egy idő után szigorúan monoton növekvő. Így nincs olyan A , amit végtelen sokszor tartalmaz.

Tehát pontosan akkor van olyan A , amit végtelen sokszor tartalmaz a sorozat, ha $3 \mid a_0$.

2. Legyen $\mathbb{R}$ a valós számok halmaza. Határozzuk meg az összes olyan $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt, amire minden valós x, y szám esetén teljesül

$$f(f(x)f(y)) + f(x+y) = f(xy).$$

Matolcsi Dávid megoldása. Ha $f(0) = 0$, akkor $y = 0$ -nál ezt kapjuk:

$$f(f(x)f(0)) + f(x+0) = f(0 \cdot x).$$

Ebben az esetben $f(x) = 0$ minden x -re. Ez valóban megoldása a függvényegyenletnek.

Most nézzük azt az esetet, amikor $f(0) \neq 0$. Ha $x = 0$ és $y = 0$, akkor

$$f(f(0)^2) + f(0) = f(0), \quad f(f(0)^2) = 0.$$

Tegyük fel, hogy $f(c) = 0$ és $c \neq 1$. Ha $y = 1 + \frac{1}{x-1}$, akkor $(x-1)(y-1) = 1$, azaz $x+y = xy$, ezért $f(x+y) = f(xy)$, így $f(f(x)f(y)) = 0$.

¹ A második nap feladatainak megoldását a novemberi számban közöljük.

Legyen $x = c$ és $y = 1 + \frac{1}{c-1}$. Ekkor $f\left(f(c)f\left(1 + \frac{1}{c-1}\right)\right) = 0$. Mivel $f(c) = 0$, $f(0) = 0$, ez viszont ellentmond az elején kikötött feltételnek.

Azt kaptuk, hogy $f(c) = 0$ esetén $c = 1$, így $f(0)^2 = 1$, ezért $f(1) = f(f(0)^2) = 0$, továbbá $f(0) = 1$ vagy $f(0) = -1$.

Világos, hogy $f(x)$ akkor és csak akkor megoldása a függvényegyenletnek, ha $-f(x)$ is megoldása (mindkét oldal előjele megfordul). Ezért az általánosság sérelme nélkül feltehetjük, hogy $f(0) = -1$.

Helyettesítsünk most az egyenletbe $y = 1$ -et:

$$\begin{aligned} f(f(x)f(1)) + f(x+1) &= f(1 \cdot x), \\ f(0) + f(x+1) &= f(x), \\ f(x+1) &= f(x) + 1. \end{aligned}$$

Ebből következik, hogy n egészekre $f(x+n) = f(x) + n$.

Megmutatjuk, hogy $f(x)$ injektív. Tegyük fel, hogy nem az, vagyis létezik olyan $A \neq B$, hogy $f(A) = f(B)$. Legyen n egy A -nál nagyobb egész, és legyen $A - n = a$ és $B - n = b$, ahol tudjuk, hogy a negatív.

Ha $f(A) = f(B)$, akkor $f(a) = f(b)$. Az $x^2 - bx + a - 1 = 0$ másodfokú egyenlet diszkriminánsa $b^2 - 4(a-1)$, ami pozitív (mivel $a-1$ negatív), ezért az egyenletnek két gyöke van, r és s . A Viète-formulákból tudjuk, hogy $r+s=b$ és $rs=a-1$; így $x=r$ és $y=s$ választással $f(f(r)f(s)) + f(b) = f(a-1) = f(a) - 1$.

Az egyenletből kivonható $f(a) = f(b)$: $f(f(r)f(s)) = -1$, $f(f(r)f(s) + 1) = 0$, amiből $f(r)f(s) + 1 = 1$, azaz $f(r)f(s) = 0$. Feltehető, hogy $s = 1$, ekkor $a = 1 \cdot r + 1$ és $b = r + 1$, tehát $a = b$, ezzel ellentmondásra jutottunk; a függvény valóban injektív.

Legyen $y = 1 - x$. Ekkor $f(f(x)f(1-x)) + f(1) = f(x(1-x))$,

$$f(f(x)f(1-x)) = f(x-x^2).$$

Az injektivitás miatt $f(x)f(1-x) = x-x^2$.

Legyen most $y = -x$. Ekkor $f(f(x)f(-x)) + f(0) = f(-x^2)$,

$$f(f(x)f(-x)) - 1 = f(-x^2),$$

$$f(f(x)f(-x)) = f(1-x^2).$$

Az injektivitás miatt $f(x)f(-x) = 1-x^2$, ezért $f(x)f(1-x) - f(x)f(-x) = x-x^2 - (1-x^2) = x-1$. Másrészt

$$f(x)f(1-x) - f(x)f(-x) = f(x)(f(1-x) - f(-x)) = f(x).$$

Így $f(x) = x-1$ minden x -re. Ez valóban jó megoldás: $(x-1)(y-1) - 1 + x + y - 1 = xy - 1$.

Ez volt a megoldás, amikor $f(0) = -1$, és ennek az ellentettje, $f(x) = 1-x$ a megoldás, amikor $f(0) = 1$.

Tehát a függvényegyenletnek három megoldása van: $f(x) = 0$, $f(x) = x-1$ és $f(x) = 1-x$.

3. Egy vadász és egy láthatatlan nyúl egy játékot játszik az euklideszi síkon. A nyúl A_0 kiindulópontja és a vadász B_0 kiindulópontja egybeesnek. A játék $(n-1)$ -edik menete után a nyúl az A_{n-1} pontban, a vadász a B_{n-1} pontban van. A játék n -edik menetében a következő három dolog történik, ebben a sorrendben:

- (i) A nyúl láthatatlan módon egy olyan A_n pontba megy, amire A_{n-1} és A_n távolsága pontosan 1.
- (ii) Egy nyomkövető eszköz megad egy P_n pontot a vadásznak. Az eszköz által a vadásznak nyújtott információ mindössze annyi, hogy P_n és A_n távolsága legfeljebb 1.
- (iii) A vadász látható módon egy olyan B_n pontba megy, amire B_{n-1} és B_n távolsága pontosan 1.

Igaz-e, bárhogyan mozogjon is a nyúl, és bármilyen pontokat jelezzon is a nyomkövető eszköz, hogy a vadász mindig meg tudja úgy választani a mozgását, hogy 10^9 menet után a távolság közte és a nyúl között legfeljebb 100 legyen?

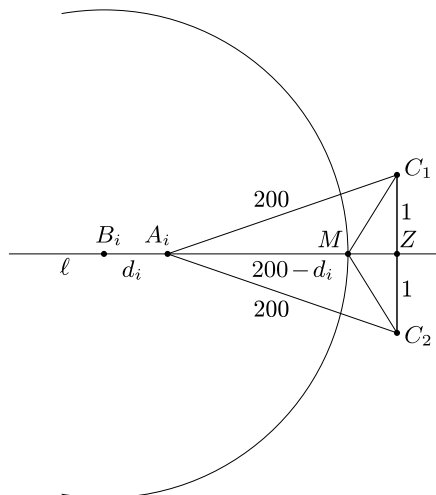
Kovács Benedek megoldása. A feladat állítása nem igaz: belátjuk, hogy a vadász akármilyen stratégiája esetén a nyomkövető jelezheti $P_1, P_2, \dots, P_{10^9}$ pontok olyan sorozatát, hogy a nyúlak létezzen olyan, a szabályok szerinti $A_0 A_1 A_2 \dots A_{10^9}$ lehetséges mozgássorozata, amire $B_{10^9} A_{10^9} > 100$. Vagyis ha a nyúl maga jelölheti ki a nyomkövető jelzéseit a számára legkedvezőbb módon, akkor a vadász nem tudja garantálni, hogy 100-on belül kerüljön a nyúlhoz.

Legyen $d_i = A_i B_i$. A nyúl célja az, hogy $d_{10^9} > 100$ legyen. Nyilván az is elég számára, ha valamilyen $i < 10^9$ -re $d_i > 100$, hiszen ha ekkor a nyúl a további lépésekben már mindig a vadással ellentétes irányban lép, akkor lépésével a vadásztól való távolságát 1-gyel növeli, a vadász pedig a saját lépésében legfeljebb 1-gyel csökkentheti, vagyis egy fordulón belül a távolság nem csökken, így a 10^9 -edik forduló után is 100-nál nagyobb lesz.

Lemma. *Ha az i . fordulón $d_i < 100$, a vadász nem tudja garantálni, hogy $d_{i+200}^2 \leq d_i^2 + \frac{1}{2}$ legyen.*

Bizonyítás. A nyúl tehát 200 forduló alatt szeretné a vadásztól vett távolságának négyzetét $\frac{1}{2}$ -nél többel megnövelni. A vadásznak az i -edik forduló kezdetekor a nyúl mozgásáról rendelkezésére álló információt a $P_1, P_2, \dots, P_{i-1}$ pontok jelentik. Ezen pontok alapján a nyúlnak akár több lehetséges helye is lehet, de most tegyük fel még azt is, hogy a nyúl konkrétan elárulja a helyzetét, az A_i pontot. A korábbi információk így feleslegessé válnak.

Jelöljük ℓ -lel az $A_i B_i$ egyenest ($A_i = B_i$ esetén tetszőleges egyenest A_i -n keresztül). Mérjük fel az *ábra* szerint az ℓ egyenesre az A_i pontból, B_i -vel ellentétes irányban $\sqrt{39999}$ egységet, így kapva a Z pontot. A Z pontban merőlegest állítva ℓ -re, ezen a merőlegesen vegyük fel a C_1 és C_2 pontokat Z -től 1 távolságra. Ekkor a Pitagorasz-tétel miatt $A_i C_1 = A_i C_2 = \sqrt{39999 + 1} = 200$ lesz.



A nyúl számára a következő 200 fordulóban az lesz a stratégia, hogy egyenesen elmegy a C_1 célpontba (ezt megteheti, hiszen $A_i C_1 = 200$). Mivel a teljes $A_i C_1$ szakasz 1 távolságon belül van az ℓ egyenestől, a nyúl minden fordulóban kijelölheti helyzetének az ℓ -re vett merőleges vetületét, mint a nyomkövető által adandó jelzést.

Természetesen ugyanezeket a jelzéseket megadhatná a nyúl akkor is, ha nem a C_1 , hanem a C_2 pontba menne el hasonló módon, hiszen a két útvonal ℓ -re nézve szimmetrikus. A vadász így a 200 forduló alatt kapott jelzésekből nem fogja tudni, hogy a C_1 vagy a C_2 pont felé tart-e a nyúl. Nézzük azt a B_{i+200} pontot, ahova a vadász ezalatt eljutott. Ez a pont biztosan a B_i középpontú, 200 sugarú körön belül van, legyen ennek az ℓ -lel való (a nyúl irányába eső) metszéspontja M .

Osszuk fel ezt a kört két részre az ℓ egyenes ($C_1 C_2$ felezőmerőlegese) mentén. Az egyik (az *ábra* szerint felső) részben lévő pontok a C_1 célponthoz, a másik (alsó) részben lévők C_2 -höz vannak közelebb. A felső rész összes pontjára igaz, hogy legalább olyan távol vannak C_2 -től, mint M , mert mind vízszintesen, mind függőlegesen legalább olyan távol vannak tőle (ha az *ábra* szerint, vagyis az ℓ egyenessel párhuzamosnak vesszük a vízszintes irányt). Ugyanígy az alsó rész összes pontja legalább olyan távol van C_1 -től, mint M .

Így a két lehetséges célpont közül a távolabbi mindenképpen legalább olyan messze lesz a vadásztól, mint az $M C_1 = M C_2$ távolság. Számítsuk ki ezt a távolságot. $B_i A_i = d_i$, így $A_i M = 200 - d_i$. Így $M Z = A_i Z - A_i M = \sqrt{39999} - 200 + d_i$, és a Pitagorasz-tétel alapján

$$M C_1 = \sqrt{M Z^2 + C_1 Z^2} = \sqrt{(\sqrt{39999} - 200 + d_i)^2 + 1}.$$

Azt kell belátnunk, hogy ez a távolság nagyobb, mint $\sqrt{d_i^2 + \frac{1}{2}}$:

$$\begin{aligned}\sqrt{(\sqrt{39\,999} - 200 + d_i)^2 + 1} &> \sqrt{d_i^2 + \frac{1}{2}}, \\ (\sqrt{39\,999} - 200 + d_i)^2 + 1 &> d_i^2 + \frac{1}{2}, \\ d_i^2 + 2(\sqrt{39\,999} - 200)d_i + 80\,000 - 400\sqrt{39\,999} &> d_i^2 + \frac{1}{2}, \\ 2(\sqrt{39\,999} - 200)d_i - 400\sqrt{39\,999} + 80\,000 &> \frac{1}{2}, \\ 2(\sqrt{39\,999} - 200)d_i + 400(200 - \sqrt{39\,999}) &> \frac{1}{2}, \\ (400 - 2d_i)(200 - \sqrt{39\,999}) &> \frac{1}{2}, \\ (200 - d_i)(200 - \sqrt{39\,999}) &> \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Mivel $d_i \leq 100$, azaz $200 - d_i \geq 100$, elég belátni, hogy

$$\begin{aligned}200 - \sqrt{39\,999} &> \frac{1}{400}, \\ 80\,000 - 400\sqrt{39\,999} &> 1, \\ 79\,999 &> 400\sqrt{39\,999}.\end{aligned}$$

Négyzetre emelve:

$$79\,999^2 > 39\,999 \cdot 400^2.$$

Ez pedig igaz, mert

$$79\,999^2 - 1 = 80\,000 \cdot 79\,998 = 16\,0000 \cdot 39\,999 = 39\,999 \cdot 400^2.$$

Ekvivalens lépésekkel dolgoztunk, így a vadász számára rosszabbik távolság legalább $MC_1 > \sqrt{d_i^2 + \frac{1}{2}}$, így a lemmát beláttuk.

A lemmából már következik a bizonyítandó állítás: a játék elején $d_0^2 = 0$, és a lemma szerint (teljes indukcióval) a vadász számára legrosszabb esetben $d_{200n}^2 > \frac{1}{2}n$, amíg a távolság el nem éri a 100-at. Ez az elérés pedig legkésőbb $n = 2 \cdot 100^2 = 20\,000$ -re bekövetkezik, azaz $200 \cdot 20\,000 = 4 \cdot 10^6$ fordulón belül. Vagyis $d_{4 \cdot 10^6}^2 > 10\,000$, azaz $d_{4 \cdot 10^6} > 100$. A nyúl ezzel elérte a célját, hiszen $4 \cdot 10^6 \leq 10^9$.