I. rész

1. *a*) Egy gyorsvonat két város közötti útját a menetrend szerint 80 km/h átlagsebességgel szokta megtenni. A vonat azonban egyik nap – pályafelújítási munkák miatt – az útja első egyharmadán csak 40 km/h átlagsebességet ért el. Az út második kétharmad részét a menetrend szerint előírt 80 km/h átlagsebességgel tette meg. Az út befejező egyharmad részén – hogy csökkentse a késést – gyorsított, így ezt a szakaszt 100 km/h átlagsebességgel tette meg. A célállomásra így is 12 perc késéssel érkezett. Hány km a távolság a két város között?

b) Egy vasúti jegy árát először p százalékkal felemelték, majd később $2p$ százalékkal csökkentették. Így a jegy eredeti árához képest végül 19,5 százalékkal olcsóbb lett. Határozzuk meg p értékét. (*13 pont*)

2. *a*) Határozzuk meg az $(x+1)^2(2+cx)^4$ kifejezésben c értékét, ha a műveletek elvégzésével nyert polinomban az elsőfokú tag együtthatója -64.

b) Határozzuk meg az A, B és C kijelentések lehetséges logikai értékeit, ha tudjuk, hogy az $(A \wedge B) \rightarrow (\neg B \vee C)$ állítás logikai értéke hamis. (*13 pont*)

3. *a*) Három teljes gráf közül az elsőnek 5-tel kevesebb, a másodiknak 6-tal több pontja van, mint a harmadiknak. A két kisebb pontszámú gráfnak együtt összesen annyi éle van, mint a legnagyobb pontszámúnak. Határozzuk meg a három teljes gráf pontjainak számát.

b) Egy gráfban *cseresznyének* nevezzük a két egymáshoz csatlakozó élből álló részgráfot. Igazoljuk, hogy egy hétpontú teljes gráfban a cseresznyék száma megegyezik a négypontú körök számával. (*13 pont*)

4. Egy nyolc valós számból álló adatsor öt eleme ismert: 5; 5,5; 10; 12,5 és 15,5. A maradék három elem elveszett, de tudjuk, hogy legalább az egyik egész szám, és a három elem közül kettő egyforma volt. Azt is tudjuk, hogy a teljes adatsor átlaga 10,5, szórása pedig 3,5 volt. Határozzuk meg a hiányzó három elem értékét. (*12 pont*)

II. rész

5. *a*) Egy háromszög egyik oldala 7 cm hosszú, az egyik ezen fekvő szög 18 fokos, az oldallal szemközti szög pedig 108 fokos. Határozzuk meg a háromszög területét és a háromszögbe írható kör sugarát.

b) Egy vízszintes terepen álló torony talppontját megközelíteni nem tudjuk. A torony magasságára árnyékának hosszából szeretnénk következtetni, de a torony megközelíthetetlensége miatt az árnyék pontos hosszát sem tudjuk megmérni.

Ezért megjelöljük a torony árnyékának végpontját akkor, amikor a Nap sugarai $75°$-os szögben érik a talajt. Néhány órával később, amikor a Nap sugarai már csak $60°$-os szögben érik a talajt, a torony árnyékát ennél 8 méterrel hosszabbnak találjuk.

Milyen magas a torony? (*16 pont*)

6. Öt osztálytárs: Anna, Balázs, Cili, Dénes és Elemér négynapos közös nyaralásra mennek. Mind a négy napon sorsolással választják ki maguk közül azt az egy embert, akinek aznap reggel be kell vásárolnia (egy-egy emberre akár többször is sor kerülhet).

a) Mekkora annak a valószínűsége, hogy mind a négy napon más-más ember megy bevásárolni?

b) Mekkora annak a valószínűsége, hogy mind a négy napon ugyanannak az embernek kell bevásárolnia?

c) Mekkora annak a valószínűsége, hogy Annát a négy nap alatt legalább kétszer kisorsolják?

d) Mekkora annak a valószínűsége, hogy a nyaralás során két ember intézi mind a négy bevásárlást (mindkettőre legalább egyszer sor kerül)? (*16 pont*)

7. *a*) Határozzuk meg az $a_n = \dfrac{4n-1}{n}$ sorozat legnagyobb alsó és legkisebb felső korlátját.

b) Egy számtani sorozat első 11 tagjának összege 660. A sorozat első tagja, hatodik tagja, és első nyolc tagjának összege (ebben a sorrendben) egy mértani sorozat három egymást követő tagját adja. Határozzuk meg a számtani sorozat első tagját és differenciáját. (*16 pont*)

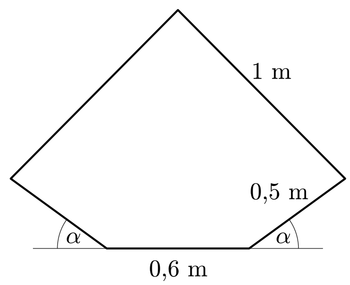
8. *a*) Határozzuk meg n értékét úgy, hogy az alábbi egyenlőség teljesüljön:

$$\int_2^n 2x+5\,\mathrm{d}x = \int_1^7 10n-2x-3x^2\,\mathrm{d}x.$$

b) Mekkora területű síkidomot vág ki az $f(x) = \dfrac{4}{(x+1)^2} - 1$ függvény grafikonja az első síknegyedből?

c) Írjuk fel az f grafikonjához az 1 abszcisszájú pontjában húzott érintőegyenes egyenletét. (*16 pont*)

9. Egy villanymozdony áramszedőjét két ponton rögzítették a mozdony tetejéhez, ezek távolsága 0,6 méter. Az áramszedő négy, egymáshoz csatlakozó egyenes szakaszból áll. A két rövidebb szakasz 0,5 méter, a két hosszabb szakasz 1 méter hosszú (lásd az *ábrát*). Az áramszedő egyes szakaszai a mozdony tetejéhez és egymáshoz képest csuklósan szabadon elmozdulhatnak. Jelölje $h(\alpha)$ az áramszedő legmagasabb pontjának magasságát a mozdony tetejéhez képest akkor, amikor mindkét rövidebb ág α szöget zár be a mozdony tetejének síkjával.



a) Igazoljuk, hogy $h(\alpha) = \sqrt{1-(0{,}3+0{,}5\cos\alpha)^2} + 0{,}5\sin\alpha$.

b) Milyen magasan lesz az áramszedő legmagasabb pontja $\alpha = 25^\circ$ esetén?

c) Mekkora α szög esetén lesz az áramszedő legmagasabb pontja éppen 1 méter magasságban? (*16 pont*)