

I. rész

1. Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket:

a)

$$\sqrt{5^{x-1}} = \sqrt[3]{0,2^{4x-20,5}},$$

(5 pont)

b)

$$\cos\left(x - \frac{5\pi}{6}\right) = \sin x.$$

(6 pont)

Megoldás. a) A hatványozás azonosságainak felhasználásával: $5^{\frac{x-1}{2}} = 5^{\frac{20,5-4x}{3}}$. Az 5-ös alapú exponenciális függvény szigorú monotonitása vagy kölcsönös egyértelműsége miatt $\frac{x-1}{2} = \frac{20,5-4x}{3}$, melynek megoldása $x = 4$.

Ellenőrzés behelyettesítéssel vagy az értelmezési tartomány ($x \in \mathbb{R}$) feltüntetése mellett az ekvivalens átalakításokra hivatkozással.

b) I. megoldás. A $\sin x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ összefüggést felhasználva

$$\cos\left(x - \frac{5\pi}{6}\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right).$$

Tudjuk, hogy $\cos \alpha = \cos \beta \Leftrightarrow \alpha = \pm \beta + 2k\pi$, ahol $k \in \mathbb{Z}$.

Ha $\alpha = \beta + 2k\pi$, akkor $x - \frac{5\pi}{6} = x - \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), melynek nincs megoldása.

Ha $\alpha = -\beta + 2k\pi$, akkor $x - \frac{5\pi}{6} = -x + \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, ahonnan $x = \frac{2\pi}{3} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Ellenőrzés behelyettesítéssel, vagy az értelmezési tartomány ($x \in \mathbb{R}$) felírása mellett az ekvivalens átalakításokra hivatkozással.

II. megoldás. Az addíciós tételt felhasználva

$$\cos\left(x - \frac{5\pi}{6}\right) = \cos x \cdot \cos \frac{5\pi}{6} + \sin x \cdot \sin \frac{5\pi}{6},$$

így az egyenlet

$$\cos x \cdot \cos \frac{5\pi}{6} + \sin x \cdot \sin \frac{5\pi}{6} = \sin x$$

alakba írható, melyet rendezve a

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos x = \frac{1}{2} \cdot \sin x$$

egyenlethez jutunk.

Mivel nincs olyan x , amelyre $\sin x$ és $\cos x$ egyszerre 0 lenne, ezért az egyenletnek nem lehet olyan gyöke, amelyre $\cos x = 0$, így az egyenlet mindkét oldalát $\frac{1}{2} \cos x$ -szel osztva $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$, ahonnan $x = \frac{2\pi}{3} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Ellenőrzés behelyettesítéssel vagy az értelmezési tartomány ($x \in \mathbb{R}$) felírása mellett az ekvivalens átalakításokra hivatkozással.

2. Egy bank 500 000 Ft kedvezményes kölcsönösszeget kínál fix 16 181 Ft-os heti törlesztő részlettel, 42 hetes futamidőre. A szerződési feltételek értelmében az aktuális törlesztő részletet az ügyfél minden héten péntekig köteles átutalni a bank számlájára. Tudjuk, hogy az ügyfél által hetente elutalt összegeket a bank 0,5%-os azonnali kamatos kamatra tudja újra befektetni. (A kamatot a befizetéskor azonnal jóváírják.)

a) A felvett kölcsönösszeg hány százalékat fizeti vissza az ügyfél a banknak? (3 pont)

b) Mekkora tényleges nyereséget ér el a bank ezzel a hitellel egy-egy ügyfélen? (6 pont)

A televízióban az egyik csatornán átlagosan minden negyedik hirdetés valamilyen hitelt reklámoz. Egy néző egy 12 reklámból álló reklámblokkban 4 hirdetést véletlenszerűen megnéz.

c) Mekkora annak a valószínűsége, hogy a megnézett négy reklám közül legalább kettő hitelt reklámoz? (5 pont)

Megoldás. a) Az ügyfél által a 42 hét alatt visszafizetett összeg $42 \cdot 16\,181 = 679\,602$ Ft, mely a felvett kölcsönösszeg $\frac{679\,602}{500\,000} \cdot 100 = 135,9204 \approx 136\%$ -a.

b) Az első törlesztést követően a bank pénze:

$$T_1 = 16\,181 \cdot \left(1 + \frac{0,5}{100}\right) = 16\,181 \cdot 1,005 \text{ Ft,}$$

a második törlesztést követően:

$$T_2 = (16\,181 \cdot 1,005 + 16\,181) \cdot 1,005 = 16\,181 \cdot 1,005^2 + 16\,181 \cdot 1,005 \text{ Ft,}$$

⋮

míg a 42. törlesztést követően:

$$T_{42} = 16\,181 \cdot 1,005^{42} + 16\,181 \cdot 1,005^{41} + \dots + 16\,181 \cdot 1,005 \text{ Ft.}$$

A 42. heti törlesztést követően kapott összeget így is írhatjuk:

$$T_{42} = 16\,181 \cdot (1,005^{42} + 1,005^{41} + \dots + 1,005).$$

A zárójelben egy mértani sorozat első 42 tagjának összege szerepel, melynek első tagja $a_1 = 1,005$, hányadosa $q = 1,005$. Ezt az összeget S_{42} -vel jelölve:

$$S_{42} = 1,005 \cdot \frac{1,005^{42} - 1}{1,005 - 1} \approx 46,84.$$

Tehát a bank tényleges nyeresége $16\,181 \cdot S_{42} - 500\,000 \approx 258\,000$ Ft.

c) I. megoldás. Annak a valószínűsége, hogy egy reklám hitelt reklámoz 0,25.

Annak a valószínűsége, hogy a megnézett négy reklám közül egyik sem hirdet hitelt: $\binom{4}{0} \cdot 0,25^0 \cdot 0,75^4 (\approx 0,3164)$.

Annak a valószínűsége, hogy a megnézett négy reklám közül pontosan egy reklám hirdet hitelt: $\binom{4}{1} \cdot 0,25^1 \cdot 0,75^3 (\approx 0,4219)$.

Így a kérdéses valószínűség: $p = 1 - 0,75^4 - 4 \cdot 0,25 \cdot 0,75^3 \approx 0,2617$.

II. megoldás. Annak a valószínűsége, hogy egy reklám hitelt reklámoz 0,25.

Annak a valószínűsége, hogy a megnézett négy reklám közül pontosan kettő reklámoz hitelt: $\binom{4}{2} \cdot 0,25^2 \cdot 0,75^2 (\approx 0,2109)$.

Annak a valószínűsége, hogy a megnézett négy reklám közül pontosan három reklámoz hitelt: $\binom{4}{3} \cdot 0,25^3 \cdot 0,75^1 (\approx 0,0469)$.

Annak a valószínűsége, hogy a megnézett négy reklám közül mind hitelt reklámoz: $\binom{4}{4} \cdot 0,25^4 \cdot 0,75^0 (\approx 0,0039)$.

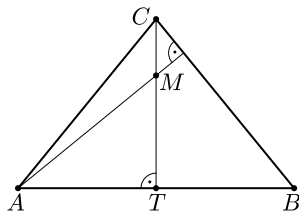
A kérdéses valószínűség az előbbi valószínűségek összege, így a keresett valószínűség kb. 0,2617.

3. Egy egyenlő szárú háromszög magasságpontja a háromszög alaphoz tartozó magasságának súlyponttól különböző harmadoló pontja.

a) Bizonyítsuk be, hogy a háromszög alapjának fele éppen a magasságpont alaptól vett távolságának és az alaphoz tartozó magasság hosszának mértani közepe. (7 pont)

b) Számítsuk ki a háromszög belső szögeinek nagyságát. (5 pont)

Megoldás. a) Jelölje az egyenlő szárú háromszög magasságpontját M , az alaphoz tartozó magasság talppontját T .



A BC oldalhoz tartozó magasságot megrajzolva az ACT háromszög hasonló lesz az MAT háromszöghöz, mert $MTA \sphericalangle = CTA \sphericalangle$ és $MAT \sphericalangle = ACT \sphericalangle$. A hasonlóság miatt $\frac{MT}{AT} = \frac{AT}{CT}$, melyet rendezve $AT = \sqrt{MT \cdot CT}$ ($AT > 0$).

Tehát a háromszög alapjának fele valóban a feladat szerinti szakaszok mértani közepe.

b) Legyen az egyenlő szárú háromszög alapjának hossza a , magasságának hossza m . Az ACT és MAT háromszögek hasonlósága miatt

$$\frac{\frac{2}{3}m}{\frac{a}{2}} = \frac{\frac{a}{2}}{m}, \quad \text{melyből} \quad \frac{m}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \quad (a, m > 0).$$

Az egyenlő szárú háromszög alapon fekvő szögeit β -val, szárszögét γ -val jelölve a BCT derékszögű háromszögben

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{m}{\frac{a}{2}} = 2 \cdot \frac{m}{a} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, \quad \text{ahonnan} \quad \beta \approx 50,77^\circ.$$

A háromszög szárszöge $\gamma = 180^\circ - 2\beta \approx 78,46^\circ$.

4. Az alábbi táblázatban a tavalyi kézilabda NB I-ben szereplő női csapatok alapszakasz végén elért pontszáma látható.

Csapat száma	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.
Szerzett pont	41	41	31	31	28	20	20	19	15	9	5	4

a) Adjuk meg az alábbi állítások logikai értékét (igaz vagy hamis).

- Az alapszakaszban átlagosan 22 pontot értek el a csapatok.

- Az elért pontszámok szórása egészen kerekítve 12 pont.

(3 pont)

Az alapszakasz vége után a négy legtöbb pontot elérő csapat a felsőházban, a négy legkevesebb pontot elérő csapat az alsóházban, míg a többi csapat a középházban folytatta küzdelmeit.

b) Igaz-e az a megállapítás, hogy az egyes „házakban” lévő csapatok pontszámainak a mediántól vett átlagos abszolút eltéréseinek összege megegyezik az alapszakaszban résztvevő összes csapat pontszámának a legkisebb módusztól vett átlagos abszolút eltéréseivel? (5 pont)

A kézilabda mérkőzéseken győzelem esetén 2, döntetlen esetén 1, vereség esetén 0 pontot kapnak a csapatok. Az egyik csapatnak a 10. forduló után csak 11 pontja volt.

c) Hányféleképpen érhetette el a csapat a 11 pontot, ha azt is figyelembe vesszük, hogy milyen sorrendben érte el azt? (6 pont)

Megoldás. a) A szerzett pontok átlaga:

$$\bar{x} = \frac{2 \cdot 41 + 2 \cdot 31 + 28 + 2 \cdot 20 + 19 + 15 + 9 + 5 + 4}{12} = \frac{264}{12} = 22,$$

tehát az első állítás igaz.

A szerzett pontok szórása:

$$\sigma = \sqrt{\frac{2 \cdot (41 - 22)^2 + 2 \cdot (31 - 22)^2 + \dots + (5 - 22)^2 + (4 - 22)^2}{12}} = \sqrt{\frac{1768}{12}} \approx 12,$$

tehát a második állítás is igaz.

b) Az elért pontszámokat monoton növekvő sorba rendezve az adatok mediánja a két középső elem számtani közepe, vagyis 20 lesz.

A legkisebb leggyakrabban előforduló elem (módusz) szintén a 20.

A mediántól vett eltérések a felső-, közép- és alsóházban rendre: 21, 21, 11, 11, 8, 0, 0, 1, 5, 11, 15, 16.

Az eltérések átlaga a felső-, közép- és alsóházban rendre 16, $\frac{9}{4}$, $\frac{47}{4}$, melyek összege 30.

A módusztól vett eltérések megegyeznek a mediántól vett eltérésekkel, melyek átlaga 10.

Tehát a megállapítás hamis.

c) A csapat 10 forduló után a 11 pontot a pontszámokat tekintve ötféleképpen érhetette el: 2-2-2-2-2-1-0-0-0-0; 2-2-2-2-1-1-1-1-0-0-0; 2-2-2-1-1-1-1-1-1-0-0; 2-1-1-1-1-1-1-1-1-1-1.

Ha azt is figyelembe vesszük, hogy a 11 pontot milyen sorrendben érte el, akkor a lehetőségek száma az ismétléses permutáció segítségével rendre $\frac{10!}{5! \cdot 4!}$; $\frac{10!}{4! \cdot 3! \cdot 3!}$; $\frac{10!}{3! \cdot 5! \cdot 2!}$; $\frac{10!}{2! \cdot 7!}$; $\frac{10!}{9!}$.

Az összes lehetőség száma az előbbi lehetőségek összege, vagyis

$$\frac{10!}{5! \cdot 4!} + \frac{10!}{4! \cdot 3! \cdot 3!} + \frac{10!}{3! \cdot 5! \cdot 2!} + \frac{10!}{2! \cdot 7!} + \frac{10!}{9!} = 1\,260 + 4\,200 + 2\,520 + 360 + 10 = 8\,350.$$

A csapat 10 forduló után 8350-féleképpen érhetette el a 11 pontot.

II. rész

5. Adott az $y = -x^2 + 3x + 3$ egyenletű parabola.

a) Adjuk meg a parabola tengelypontjának koordinátáit. (3 pont)

b) Számítsuk ki a megadott parabola $x - 2y = 1$ egyenletű egyenesre illeszkedő húrjának a hosszát. (6 pont)

c) Írja fel a parabola azon érintőjének egyenletét, amely párhuzamos a parabola 3 és 4 abszcisszájú pontjait összekötő szakasszal. (7 pont)

Megoldás. a) Az adott egyenlet jobb oldalát teljes négyzetté alakítva:

$$y = -x^2 + 3x + 3 = -[x^2 - 3x] + 3 = -\left[\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}\right] + 3 = -\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{21}{4},$$

ahonnan a tengelypont koordinátái $T\left(\frac{3}{2}; \frac{21}{4}\right)$.

b) A húr két végpontjának koordinátáit az alábbi egyenletrendszer megoldásai adják:

$$\begin{aligned}y &= -x^2 + 3x + 3, \\1 &= x - 2y.\end{aligned}$$

A második egyenletből x -et kifejezve, majd a kapott kifejezést a parabola egyenletébe behelyettesítve rendezés után a $-4y^2 + y + 5 = 0$ másodfokú egyenletet kapjuk, melynek gyökei $y_1 = -1$ és $y_2 = \frac{5}{4}$.

A húr végpontjainak koordinátái $A(-1; -1)$ és $B\left(\frac{7}{2}; \frac{5}{4}\right)$, melyből a húr hossza

$$h = \sqrt{\left(\frac{7}{2} + 1\right)^2 + \left(\frac{5}{4} + 1\right)^2} = \frac{9}{4}\sqrt{5} \approx 5,03 \text{ egység}.$$

c) A parabola 3 és 4 abszcisszájú pontjainak koordinátái $P(3; 3)$ és $Q(4; -1)$. A P és Q pontokon áthaladó egyenes meredeksége a $\vec{PQ}(1; -4)$ irányvektorból $m = -4$. Mivel a keresett érintő párhuzamos a PQ egyenessel, ezért az érintő egyenlete $y = -4x + b$ alakú, ahol b értékét keressük.

Az előbbi alakban megadott egyenesek közül az lesz érintő, melynek egy közös pontja van a megadott parabolával, tehát az alábbi egyenletrendszernek csak egy számpár megoldása lehet:

$$\begin{aligned}y &= -x^2 + 3x + 3, \\y &= -4x + b.\end{aligned}$$

A két jobb oldali kifejezés egyenlőségéből az $x^2 - 7x + b - 3 = 0$ paraméteres másodfokú egyenletet kapjuk, melynek pontosan akkor van egy darab valós gyöke, ha a diszkriminánsa 0, azaz ha $(-7)^2 - 4(b - 3) = 0$, ahonnan $b = \frac{61}{4}$.

A keresett érintő egyenlete: $y = -4x + \frac{61}{4}$.

6. Egy városban hat tömegközlekedési csomópont található. Az egyes csomópontokból a többi csomópontba bizonyos számú közvetlen járat vezet (két csomópont között csak egy közvetlen járat megy). A csomópontokból induló járatok számának szorzata 60. A közlekedési társaság ellenőrei szeretnék a csomópontok közötti összes vonalon jegyellenőrzést tartani. Az ellenőrök valamelyik csomópontból közösen indulnak, elmennek egy másik csomópontig, majd onnan együtt tovább utaznak egy következőbe.

a) A fenti módszert folytatva meg tudják-e úgy szervezni a csomópontok közötti ellenőrzést, hogy minden vonalon pontosan egyszer utazzanak? (8 pont)

Az egyik állomás mozgólépcsőjén állva egy utas 40 másodperc alatt ér le a föld felszínéről a föld alatti peronra. Ugyanezt az utat 55 másodperc alatt teszi meg, ha a mozgólépcső nem működik és ő azon egyenletes tempóban lefelé gyalogol.

b) Mennyi idő alatt ér le az utas a peronra, ha a mozgólépcső működik, és közben ő azon egyenletesen sétál lefelé? (8 pont)

Megoldás. a) Jelölje az egyes közlekedési csomópontokból induló közvetlen járatok számát rendre a, b, c, d, e és f . Ekkor a feladat szövege szerint $a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e \cdot f = 60$.

A közvetlen járatok számának meghatározásához bontsuk prímtényezőik szorzatára a 60-at: $60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$. A csomópontokat és azok közötti közvetlen járatokat egyszerű gráffal szemlélítve megállapítható, hogy a gráfban az egyes pontok fokszáma legfeljebb 5 lehet, ezért a csúcsok fokszámai csak a következők lehetnek: 1, 1, 2, 2, 3, 5 vagy 1, 1, 1, 3, 4, 5. Utóbbi a fokszámtétel miatt nem lehetséges, előbbi viszont igen, ekkor létezik a feladat feltételeinek megfelelő gráf.

A feladatban említett csomópontok közötti ellenőrzést pontosan akkor tudnák végrehajtani az ellenőrök, ha gráfunknak lenne Euler-vonala, ami az Euler-tétel szerint nem lehetséges, így az ellenőrzés a megadott feltételekkel nem végrehajtható.

b) Jelölje a mozgólépcső hosszát méterben l , a kérdéses időt pedig másodpercben t^* . Az $s = v \cdot t$ összefüggést felhasználva, a feladat szövege alapján az alábbi táblázat készíthető:

	út	idő	sebesség
ha a vásárló áll és a mozgólépcső működik	l	40	$\frac{l}{40}$
ha a mozgólépcső nem működik, és a vásárló sétál	l	55	$\frac{l}{55}$
ha a mozgólépcső működik, és a vásárló sétál	l	t^*	$\frac{l}{40} + \frac{l}{55}$

A kérdéses időt a táblázat utolsó sorából felírva:

$$t^* = \frac{s}{v} = \frac{l}{\frac{l}{40} + \frac{l}{55}} = \frac{l}{\frac{19l}{440}} = \frac{440}{19} \approx 23,16 \text{ másodperc.}$$

Tehát az utas kb. 23 másodperc alatt ér le a peronra, ha a mozgólépcső működik és ő azon egyenletesen sétál lefelé.

7. Egy egyetem közlekedésmérnök szakos hallgatói egy lámpa nélküli forgalmas gyalogátkelőhely mellett figyelik az autósok megállási szokásait. Egy hétfői napon egy adott időszakban a zebrán áthaladó járművek 16%-a busz, 24%-a motor, 40%-a személygépkocsi volt, a többi esetben pedig más jármű haladt át a zebrán. Megfigyelték, hogy a buszsofőrök az esetek 80%-ában, a személygépkocsik vezetői 65%-ban, a motorosoké 60%-ban, míg a többi járművezető 75%-ban áll meg a zebra előtt.

a) Mekkora annak a valószínűsége, hogy ha egy gyalogos lelép a zebrára, megáll a zebra előtt közlekedő jármű? (6 pont)

Zsuzsa nénit a zebrán majdnem elütötte egy jármű, ami nem állt meg.

b) Mekkora annak a valószínűsége, hogy a jármű motor volt? (7 pont)

A sok baleset miatt a hatóság úgy döntött, hogy jelzőlámpát szerelnek fel a gyalogátkelőhelyhez, mely reggel 6 óra és este 8 óra között 2 perc 15 másodpercenként vált zöldre. Este 8 órától reggel 6 óráig a lámpa nem működik, ekkor sárgán villog.

c) Hányszor vált zöldre a lámpa egy nap alatt, ha az első váltás mindig a bekapcsoláskor, pontban 6 órakor történik? (3 pont)

Megoldás. a) Jelölje A azt az eseményt, hogy a zebra előtt közlekedő jármű megáll, B_1 , B_2 , B_3 és B_4 pedig rendre azt, hogy a zebra elé érkező jármű busz, motor, személygépkocsi, illetve más. Ekkor a feladat szövege alapján: $P(A | B_1) = 0,8$, $P(A | B_2) = 0,6$, $P(A | B_3) = 0,65$, $P(A | B_4) = 0,75$, valamint $P(B_1) = 0,16$, $P(B_2) = 0,24$, $P(B_3) = 0,4$, $P(B_4) = 0,2$.

A feladat szerint $P(A)$ valószínűségét keressük, melynek értéke:

$$P(A) = 0,8 \cdot 0,16 + 0,6 \cdot 0,24 + 0,65 \cdot 0,4 + 0,75 \cdot 0,2 = 0,682.$$

Tehát annak a valószínűsége, hogy a zebra előtt közlekedő jármű megáll 0,682.

b) *I. megoldás.* A feladat szövege alapján a következő feltételes valószínűségeket írhatjuk fel:

$$P(\bar{A} | B_1) = 0,2, \quad P(\bar{A} | B_2) = 0,4, \quad P(\bar{A} | B_3) = 0,35, \quad P(\bar{A} | B_4) = 0,25.$$

A Bayes-tétel alapján annak a valószínűsége, hogy a meg nem álló jármű motor volt:

$$\begin{aligned} P(B_2 | \bar{A}) &= \frac{P(\bar{A} | B_2) \cdot P(B_2)}{\sum_{i=1}^4 P(\bar{A} | B_i) \cdot P(B_i)} = \\ &= \frac{0,4 \cdot 0,24}{0,2 \cdot 0,16 + 0,4 \cdot 0,24 + 0,35 \cdot 0,4 + 0,25 \cdot 0,2} \approx 0,3019. \end{aligned}$$

Tehát a keresett valószínűség kb. 0,3019.

II. megoldás. Tekintsünk 1000 db zebrán áthaladó járművet. Ekkor a járművek között 160 db busz, 240 db motor, 400 db személygépkocsi és 200 db más van. A feladat szövege alapján a meg nem álló buszok, motorok, személygépkocsik és más járművek száma rendre 32, 96, 140 és 50. A meg nem álló motorosok száma 96, mely az összes meg nem álló jármű $\frac{96}{32 + 96 + 140 + 50} = \frac{96}{318} \approx 0,3019$ -ed része.

A kiszámított arány független a konkrét darabszámtól, az csupán az eloszlástól függ, így a keresett valószínűség kb. 0,3019.

c) Reggel 6 és este 8 óra között 14 óra, azaz 840 perc telik el. A lámpa 2,25 percenként vált zöldre, így a megadott időintervallumban a zöldre váltások száma:

$$n = \left\lceil \frac{840}{2,25} \right\rceil + 1 = 374.$$

8. Kovács úr az újonnan épített házába az ábrán látható félköríves ablakot szeretné beépíteni. Az ablak félköríves része opálüvegből készült, mely egységnyi felületen feleannyi fényt enged át, mint a tisztán átlátszó téglalap alakú rész.

Az $ABCD$ téglalap, amibe az ablakot beilleszti 6 méter területű. Milyen széles és magas a beépített ablak, ha az a lehető legtöbb fényt engedi be a lakásba? (16 pont)



I. megoldás. Az ablak tisztán átlátszó téglalap alakú részének szélességét a -val, magasságát b -vel jelölve az $ABCD$ téglalap kerülete $3a + 2b = 6$. Mivel az ablakon átvivő fény mennyisége egyenesen arányos a felülettel, ezért a

$$V(a; b) = 2ab + \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot \pi}{2}$$

függvény maximumát keressük. A $3a + 2b = 6$ kifejezésből $b = 3 - \frac{3}{2}a$ helyettesítéssel a világosságot megadó másodfokú függvény

$$V(a) = -3a^2 + \frac{a^2}{8}\pi + 6a,$$

melynek zérushelyei $a_1 = 0$ és $a_2 = \frac{6}{3 - \frac{\pi}{8}}$.

Mivel V főgyűjtője negatív, ezért függvényünknek valóban maximuma lesz, melyet a zérushelyek számtani közepénél vesz fel. A V függvény maximumhelye tehát $a = \frac{6}{6 - \frac{\pi}{4}} \approx 1,15$ m. a értékét a $b = 3 - \frac{3}{2}a$ összefüggésbe visszahelyettesítve $b \approx 1,27$ (m).

A beépített ablak tehát kb. 115 cm széles és kb. 185 cm magas.

II. megoldás. Az ablak tisztán átlátszó téglalap alakú részének szélességét a -val, magasságát b -vel jelölve az $ABCD$ téglalap kerülete $3a + 2b = 6$. Mivel az ablakon átvivő fény mennyisége egyenesen arányos a felülettel, ezért a

$$V(a; b) = 2ab + \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot \pi}{2}$$

függvény maximumát keressük. A $3a + 2b = 6$ kifejezésből $b = 3 - \frac{3}{2}a$ helyettesítéssel a világosságot megadó függvény

$$V(a) = 6a - 3a^2 + \frac{a^2}{8}\pi$$

alakba írható, melynek akkor lehet szélsőértéke, ha első deriváltja 0. A függvényt deriválva $V'(a) = 6 - 6a + \frac{\pi}{4}a$, melyből

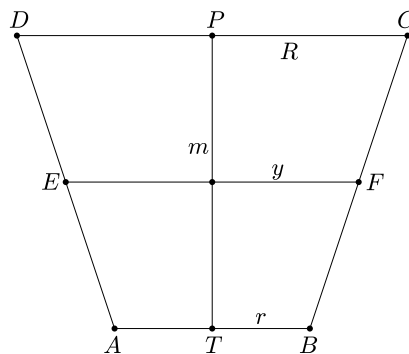
$$a = \frac{6}{6 - \frac{\pi}{4}} \approx 1,15 \text{ m.}$$

Az $a = \frac{6}{6 - \frac{\pi}{4}}$ helyen V' előjelet $(+ \rightarrow -)$ vált, tehát V -nek a -ban valóban maximuma van. a értékét a $b = 3 - \frac{3}{2}a$ összefüggésbe visszahelyettesítve $b \approx 1,27$ (m).

A beépített ablak tehát kb. 115 cm széles és kb. 185 cm magas.

9. Egy hazai gyorsétterem csonkakúp alakú kávéspohárban szolgálja fel a kávé. A 9 cm magas pohárba magassága feléig töltik a presszókávé, melyet zárható, hőálló fedéllel látnak el, hogy a kávé biztosan ne tudjon kiborulni. A pohár alsó, kisebbik alapkörének belső átmérője 4,5 cm, míg a felső, nagyobbé 7 cm. Milyen magasan lesz a pohárban a kávé, ha a poharat megfordítva a nagyobb alapjára állítjuk? (16 pont)

Megoldás. Készítsünk síkmetszetet a csonkakúp alakú kávéspohárról, majd számítsuk ki a kávé térfogatát (1. ábra).

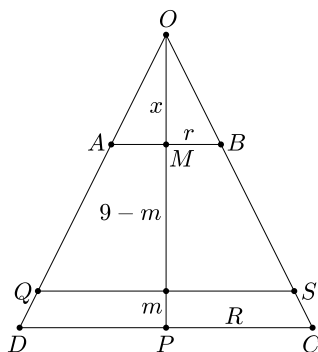


1. ábra

A pohárban lévő kávé térfogata a csonkakúp térfogatának képletéből:

$$V_{\text{kávé}} = \frac{(r^2 + y^2 + r \cdot y) \cdot m \cdot \pi}{6} = \frac{(2,25^2 + 2,875^2 + 2,25 \cdot 2,875) \cdot 9 \cdot \pi}{6} \approx 93,3 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

Ha a poharat megfordítjuk, azaz a nagyobb alapjára állítjuk, a kávé térfogata nem változik, így a megfelelő térfogatok felírása után meghatározható a keresett magasság. Egészítsük ki a megfordított csonkakúpot forgáskúppá, készítsünk síkmetszetet, majd számítsuk ki az egyes részek térfogatait (2. ábra).



2. ábra

Az OMB háromszög hasonló az OPC háromszöghöz, mert megfelelő szögek egyenlők. A kiegészítő kiskúp magasságát x -szel jelölve a hasonlóság miatt $\frac{x}{r} = \frac{x+9}{R}$, vagyis $\frac{x}{2,25} = \frac{x+9}{3,5}$, ahonnan $x = 16,2$ (cm).

A kiegészítő kiskúp térfogata az előbbiek szerint:

$$V_{\text{kiskúp}} = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot x}{3} = \frac{2,25^2 \cdot \pi \cdot 16,2}{3} \approx 85,9 \text{ (cm}^3\text{)},$$

a teljes forgáskúp térfogata:

$$V_{\text{teljes}} = \frac{R^2 \cdot \pi \cdot (x+9)}{3} = \frac{3,5^2 \cdot \pi \cdot 25,2}{3} \approx 323,3 \text{ (cm}^3\text{)},$$

melyekből a pohár térfogata $V_{\text{pohár}} = V_{\text{teljes}} - V_{\text{kiskúp}} \approx 237,4 \text{ (cm}^3\text{)}.$

Ha a pohár térfogatából kivonjuk a kávé térfogatát, megkapjuk a kimaradó rész térfogatát, ami $V_{\text{kimaradó}} = V_{\text{pohár}} - V_{\text{kávé}} \approx 144,1 \text{ (cm}^3\text{)}.$

A kávé magasságának meghatározásához használjuk a hasonló testek térfogatának arányára vonatkozó tételt. A kiegészítő kiskúp középpontosan hasonló ahhoz a forgáskúphoz, amelyet úgy kapunk, hogy a teljes forgáskúpból elhagyjuk a kávé tartalmazó részt, így a térfogatok arányát felírva

$$\frac{V_{\text{kiskúp}}}{V_{\text{kiskúp}+\text{kimaradó}}} = \left(\frac{16,2}{25,2 - m} \right)^3, \quad \text{melyből } m \approx 2,7 \text{ cm.}$$

Tehát a megfordított pohárban kb. 2,7 cm magasan áll a kávé.