

I. rész

1. Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket:

a)

$$\sqrt{5^{x-1}} = \sqrt[3]{0,2^{4x-20,5}},$$

(5 pont)

b)

$$\cos\left(x - \frac{5\pi}{6}\right) = \sin x.$$

(6 pont)

2. Egy bank 500 000 Ft kedvezményes kölcsönösszeget kínál fix 16 181 Ft-os heti törlesztő részlettel, 42 hetes futamidőre. A szerződési feltételek értelmében az aktuális törlesztő részletet az ügyfél minden héten péntekig köteles átutalni a bank számlájára. Tudjuk, hogy az ügyfél által hetente elutalt összegeket a bank 0,5%-os azonnali kamatos kamatra tudja újra befektetni. (A kamatot a befizetéskor azonnal jóváírják.)

a) A felvett kölcsönösszeg hány százalékát fizeti vissza az ügyfél a banknak? (3 pont)

b) Mekkora tényleges nyereséget ér el a bank ezzel a hitellel egy-egy ügyfélen? (6 pont)

A televízióban az egyik csatornán átlagosan minden negyedik hirdetés valamilyen hitelt reklámoz. Egy néző egy 12 reklámból álló reklámblokkban 4 hirdetést véletlenszerűen megnéz.

c) Mekkora annak a valószínűsége, hogy a megnézett négy reklám közül legalább kettő hitelt reklámoz? (5 pont)

3. Egy egyenlő szárú háromszög magasságpontja a háromszög alaphoz tartozó magasságának súlyponttól különböző harmadoló pontja.

a) Bizonyítsuk be, hogy a háromszög alapjának fele éppen a magasságpont alaptól vett távolságának és az alaphoz tartozó magasság hosszának mértani közepe. (7 pont)

b) Számítsuk ki a háromszög belső szögeinek nagyságát. (5 pont)

4. Az alábbi táblázatban a tavalyi kézilabda NB I-ben szereplő női csapatok alapszakasz végén elért pontszáma látható.

Csapat száma	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.
Szerzett pont	41	41	31	31	28	20	20	19	15	9	5	4

a) Adjuk meg az alábbi állítások logikai értékét (igaz vagy hamis).

- Az alapszakaszban átlagosan 22 pontot értek el a csapatok.

- Az elért pontszámok szórása egészen kerekítve 12 pont.

(3 pont)

Az alapszakasz vége után a négy legtöbb pontot elérő csapat a felsőházban, a négy legkevesebb pontot elérő csapat az alsóházban, míg a többi csapat a középházban folytatta küzdelmeit.

b) Igaz-e az a megállapítás, hogy az egyes „házakban” lévő csapatok pontszámainak a mediántól vett átlagos abszolút eltéréseinek összege megegyezik az alapszakaszban résztvevő összes csapat pontszámának a legkisebb módusztól vett átlagos abszolút eltéréseivel? (5 pont)

A kézilabda mérkőzéseken győzelem esetén 2, döntetlen esetén 1, vereség esetén 0 pontot kapnak a csapatok. Az egyik csapatnak a 10. forduló után csak 11 pontja volt.

c) Hányféleképpen érhetette el a csapat a 11 pontot, ha azt is figyelembe vesszük, hogy milyen sorrendben érte el azt? (6 pont)

II. rész

5. Adott az $y = -x^2 + 3x + 3$ egyenletű parabola.

a) Adjuk meg a parabola tengelypontjának koordinátáit. (3 pont)

b) Számítsuk ki a megadott parabola $x - 2y = 1$ egyenletű egyenesre illeszkedő húrjának a hosszát. (6 pont)

c) Írja fel a parabola azon érintőjének egyenletét, amely párhuzamos a parabola 3 és 4 abszcisszájú pontjait összekötő szakasszal. (7 pont)

6. Egy városban hat tömegközlekedési csomópont található. Az egyes csomópontokból a többi csomópontba bizonyos számú közvetlen járat vezet (két csomópont között csak egy közvetlen járat megy). A csomópontokból induló járatok számának szorzata 60. A közlekedési társaság ellenőrei szeretnék a csomópontok közötti összes vonalon jegyellenőrzést tartani. Az ellenőrök valamelyik csomópontból közösen indulnak, elmennek egy másik csomópontig, majd onnan együtt tovább utaznak egy következőbe.

a) A fenti módszert folytatva meg tudják-e úgy szervezni a csomópontok közötti ellenőrzést, hogy minden vonalon pontosan egyszer utazzanak? (8 pont)

Az egyik állomás mozgólépcsőjén állva egy utas 40 másodperc alatt ér le a föld felszínéről a föld alatti peronra. Ugyanezt az utat 55 másodperc alatt teszi meg, ha a mozgólépcső nem működik és ő azon egyenletes tempóban lefelé gyalogol.

b) Mennyi idő alatt ér le az utas a peronra, ha a mozgólépcső működik, és közben ő azon egyenletesen sétál lefelé? (8 pont)

7. Egy egyetem közlekedésmérnök szakos hallgatói egy lámpa nélküli forgalmas gyalogátkelőhely mellett figyelik az autósok megállási szokásait. Egy hétfői napon egy adott időszakban a zebrán áthaladó járművek 16%-a busz, 24%-a motor, 40%-a személygépkocsi volt, a többi esetben pedig más jármű haladt át a zebrán. Megfigyelték, hogy a buszsofőrök az esetek 80%-ában, a személygépkocsik vezetői 65%-ban, a motorosoké 60%-ban, míg a többi járművezető 75%-ban áll meg a zebra előtt.

a) Mekkora annak a valószínűsége, hogy ha egy gyalogos lelép a zebrára, megáll a zebra előtt közlekedő jármű? (6 pont)

Zsuzsa nénit a zebrán majdnem elütötte egy jármű, ami nem állt meg.

b) Mekkora annak a valószínűsége, hogy a jármű motor volt? (7 pont)

A sok baleset miatt a hatóság úgy döntött, hogy jelzőlámpát szerelnek fel a gyalogátkelőhelyhez, mely reggel 6 óra és este 8 óra között 2 perc 15 másodpercenként vált zöldre. Este 8 órától reggel 6 óráig a lámpa nem működik, ekkor sárgán villog.

c) Hányszor vált zöldre a lámpa egy nap alatt, ha az első váltás mindig a bekapcsoláskor, pontban 6 órakor történik? (3 pont)

8. Kovács úr az újonnan épített házába az ábrán látható félköríves ablakot szeretné beépíteni. Az ablak félköríves része opálüvegből készült, mely egységnyi felületen feleannyi fényt enged át, mint a tisztán átlátszó téglalap alakú rész. Az $ABCD$ téglalap, amibe az ablakot beilleszti 6 méter kerületű. Milyen széles és magas a beépített ablak, ha az a lehető legtöbb fényt engedi be a lakásba? (16 pont)



9. Egy hazai gyorsétterem csonkakúp alakú kávéspohárban szolgálja fel a kávé. A 9 cm magas pohárba magassága feléig töltik a presszókávé, melyet zárható, hőálló fedéllel látnak el, hogy a kávé biztosan ne tudjon kiborulni. A pohár alsó, kisebbik alapkörének belső átmérője 4,5 cm, míg a felső, nagyobbé 7 cm. Milyen magasan lesz a pohárban a kávé, ha a poharat megfordítva a nagyobb alapjára állítjuk? (16 pont)