

A Bernoulli-egyenlőtlenséget *Jacob Bernoulli* svájci matematikus állította fel. Ez az egyenlőtlenség a matematika egyik legfontosabb tétele, számos összefüggés bizonyításában szerepel segédtegelként. Az egyenlőtlenség az alábbi alakú:

$$(1) \quad (1+x)^n \geq 1+nx,$$

ahol $1+x > 0$, azaz $x > -1$ valós szám, és n tetszőleges pozitív egész szám ($n \in \mathbb{N}^+$). Egyenlőséget akkor kapunk, ha $n = 1$ vagy $x = 0$.

Egy egyszerű bizonyítás. A bizonyítás előnye, hogy nem igényel komoly matematikai ismereteket, elegendő csupán a *mértani sorozat összegképletének* ismerete, ami viszont középszintű érettség is követelmény.

Vegyük az $a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 1, \dots, a_n = 1$ n elemű sorozatot. Ezt tekinthetjük olyan számtani sorozatnak, melynél a különbség $d = 0$, vagy olyan mértani sorozatnak is, amelynél a hányados $q = 1$. A sorozat első n elemének összege n . Ha azonban a mértani sorozatnak tekintett fenti sorozat esetén a hányados értékét $x \geq 0$ értékkel megnöveljük, akkor $q = 1+x \geq 1$ lesz. A mértani sorozatnak – a változatlan elsőt kivéve – mindegyik eleme, így a sorozat összege is növekedni fog, tehát a mértani sorozat első n tagjának összegére vonatkozó képlet alapján

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{1 \cdot [(1+x)^n - 1]}{(1+x) - 1} \geq n,$$

amelyből rendezés után éppen a Bernoulli-egyenlőtlenség adódik.

Ha $-1 < x < 0$, akkor $0 < q = 1+x < 1$, vagyis a mértani sorozat csökkenő, így a fentiekkel megegyező gondolatmenet alapján írhatjuk, hogy

$$\frac{(1+x)^n - 1}{(1+x) - 1} \leq n,$$

amelyből rendezés után ismét az (1) egyenlőtlenség adódik. (Az egyenlőtlenség iránya azért fordul meg, mert a tört eltüntetésekor az egyenlőtlenség mindkét oldalát x -el kell szorozni, melynek a feltétel szerinti értéke negatív szám.)

A Bernoulli-egyenlőtlenséget ezzel minden megengedett x -re bebizonyítottuk.

Megjegyzések. 1. Az egyenlőtlenség egy másik, leginkább elterjedt, teljes indukciót használó bizonyítása megtalálható itt:

<https://hu.wikipedia.org/wiki/Bernoulli-egyenl%C5%91tlens%C3%A9g>.

2. Több KöMaL feladat megoldásában is lehetett használni a Bernoulli-egyenlőtlenséget. Például:

B. 4715. Adjuk meg az összes pozitív egész számokból álló (a, b) számpárt, amelyre $a^{(b^2)} = b^a$ teljesül.

Megoldás:

<https://www.komal.hu/verseny/feladat.cgi?a=feladat&f=B4715&l=hu>.

F. 3264. Bizonyítsuk be, hogy minden pozitív x -re

$$\left(1 + \frac{[x]}{x}\right)^x \geq 2^{[x]}.$$

Megoldás:

<http://db.komal.hu/KomalHU/felhivatoz.phtml?id=42706>.

3. A cikk eredeti formájában megtalálható itt:

<http://picaso.hu/matematika>.