

Hősünkről éppen öt éve, a KöMaL **B. 4419.** feladatában hallottunk utoljára [K]:

Kassza Blanka, szenvedélyes szerencsejátékos tegnap 20 000 forintot dobált bele egy félkarú rabló gépbe, amit ráadásul a családja tudta nélkül, a kosztpénzből vett kölcsön. Hogy a dolog ne tudódjon ki, ma a családi kasszából magához veszi a maradék 40 000 forintot is, és ismét meglátogatja a kaszinót, ahol leül az egyik rulettasztalhoz. Mivel nem akar túl sokat kockáztatni, minden menetben a pirosra vagy a feketére tesz 1000 forintot. Ha nyer, aminek $18/37$ az esélye, akkor 1000 forinttal gazdagodik, különben elveszíti a feltett pénzt. Akkor hagyja abba a játékot, ha sikerül összesen 60 000 forintot összegyűjtenie – ebben az esetben otthon hiánytalanul visszateheti a pénzt a helyére – vagy pedig mindenét elveszíti. Mekkora a valószínűsége, hogy Kassza Blankának sikerül a 60 000 forintot összegyűjtenie? (KöMaL **B. 4419.** feladat, 2012. január)

Kassza Blanka sorsát azóta sűrű csönd övezte – talán átmenetileg jó útra tért – de idén, év elején újra febukkant, nem is akárhol, hanem a `police.hu` híreiben [P]:

A Bács-Kiskun Megyei Rendőr-főkapitányság Gazdaságvédelmi Osztálya csalás büntett elkövetésének megalapozott gyanúja miatt 2017. január 5-én őrizetbe vett egy 35 éves kecskeméti lakost. A férfi a rendelkezésre álló bizonyítékok alapján megalapozottan gyanúsítható azzal, hogy 2016 szeptemberében és októberében az egyik bank tanácsadójaként előre eltervezve, a bank információs rendszerébe valótlán adatokat vitt be, illetve egyéb műveletek elvégzésével az információs rendszer működését befolyásolta. Pénztárosként a nap elején fiktív befizetéseket könyvelt le az ügyfelek számláira, ezeket a nap folyamán az ügyfelek nevében külföldi számlákra utalta. Az így megszerzett pénz felhasználásával online szerencsejáték-oldalakon fogadott, majd a nap végén – mivel nem nyert és nem tudta visszatenni az ellopott pénzt – sztorizta a reggeli befizetéseket, így több mint 58 millió forint kárt okozott a banknak.

A híradásokból sajnos nem derül ki, hogy az illető milyen szerencsejátékot játszott milyen téttekkel, mint ahogy az sem, sikerült-e még időben a felesége nevére íratnia a hűtőszekrényt. Volt portál, amely a hírt egy ruletkeerék képével illusztrálta, azt sugallva, hogy rulettezett [I], egy másik portál egy pókerasztal képével próbálta színesíteni [N]. A továbbiakban feltételezzük, hogy Kassza Blanka ezúttal is rulettezett, és minden menetben a feketére vagy a pirosra téve próbált valamilyen előre meghatározott összeget összegyűjteni.

Tippeljünk!

Mielőtt elkezdenénk valószínűségeket számítani, álljunk meg, és tippeljünk:

1. Hány százalék esélye van Kassza Blankának a **B. 4419.** feladatban elérnie a 60 000 ezer forintot?
2. Tegyük fel, hogy leülünk rulettezni k egység pénzzel, minden körben felteszünk 1 egységet a pirosra vagy a feketére, és egészen addig játszunk, míg vagy elfogy minden pénzünk, vagy elérjük a 100 egységnyi pénzt. Melyik az a legkisebb $0 \leq k \leq 100$ egész szám, amellyel már 50 százaléknál magasabb az esélyünk arra, hogy hamarabb érjük el a 100 egységet, mint hogy elfogy a pénzünk?

A 2. kérdést Keleti Tamás tette fel egy Facebook-posztban, azzal a kikötéssel, hogy csak tippelni szabad, legfeljebb fejben szabad számolni [F]. A hallgatóság, amelyben matematikusok is rész vettek, a következő tippeket adta:

2, 35, 51, 53, 55, 56, 60, 61, 65, 67, 71, 72, 74, 75, 78, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 95, 96, 97, 100, 101.

Mivel a kérdések nagyon hasonlóak, csak a kiinduló pénz mennyiségében és a célként kitűzött nyeremény nagyságában különböznek, gyorsan betűzzük meg a kiszámítandó mennyiségeinket.

- (a) Jelölje $p(k, n)$ annak a valószínűségét, hogy k egység pénzzel indulva, előbb érjük el az n egységnyi vagyont, mint a 0 egységet;
- (b) Jelölje $\ell(k, n)$ a várható lépésszámot addig, amíg elérjük az n vagy a 0 egység valamelyikét.

A **B. 4419.** feladatban 1000 forint az egység, tehát $p(40, 60)$ értéke a kérdés, a 2. kérdésben pedig a legkisebb olyan k , amelyre $p(k, 100) > \frac{1}{2}$.

A kérdések életszerűségéhez tartozik, hogy a várható lépésszámok ne legyenek túl magasak – senki nem lenne képes mondjuk 10^8 menetet együltében végigjátszani. Ezért az $\ell(k, n)$ értékét is ki fogjuk számítani.

És ha soha nem ér véget a játék?

A játékunk egy véletlen bolyongás. Két forduló között összesen $(n + 1)$ -féle állapotunk lehet, és ezeket leírhatjuk egyetlen, 0 és n közötti egész számmal: azzal, hogy mennyi pénzünk van. A bolyongás a k állapotból indul, a 0 vagy az n állapotban véget ér. $0 < m < n$ esetén az m állapotból vagy $\frac{18}{37}$ valószínűséggel az $(m + 1)$ állapotba, vagy $\frac{19}{37}$ valószínűséggel az $(m - 1)$ állapotba lépünk, és ezek az események függetlenek a játék korábbi menetétől.

A bolyongásnak valójában háromféle kimenetele lehetséges. Lehetséges ugyanis, hogy soha nem érjük el sem a 0, sem az n egységet. Megmutatjuk, hogy ennek a valószínűsége 0.

A bolyongás közben felváltva lépünk páros és páratlan értékekre. Ha N lépés után az m értékre érkezünk, akkor szükséges, hogy $N + k - m$ páros legyen; ehhez összesen $\frac{N - k + m}{2}$ alkalommal kell felfelé, és $\frac{N + k - m}{2}$ alkalommal kell lefelé lépni. Az ilyen lépéssorozatok száma nem lehet nagyobb, mint $\binom{N}{(N - k + m)/2}$, de ebbe beleszámoltunk olyan sorozatokat is, amikor a bolyongás közben elhagyjuk a $[1, n - 1]$ intervallumot. Ezzel ne törődjünk; sőt, az is elég lesz, ha az összes N hosszú fel/le sorozat számával, 2^N -nel becsülünk felülről. Tehát, annak valószínűségére, hogy a bolyongás soha nem ér véget, bármilyen N pozitív egész esetén felírhatjuk a következő becslést:

$$\begin{aligned} & P(\text{a bolyongás soha nem ér véget}) \leq \\ & \leq P(\text{a bolyongás nem ér véget } N \text{ lépés alatt}) \leq \\ & \leq \sum_{\substack{0 \leq m < n \\ N+k-m \text{ páros}}} \binom{N}{\frac{N-k+m}{2}} \left(\frac{19}{37}\right)^{\frac{N-k+m}{2}} \left(\frac{18}{37}\right)^{\frac{N+k-m}{2}} < \\ & < n \cdot 2^N \cdot \left(\frac{19}{37}\right)^{\frac{N-n}{2}} \left(\frac{18}{37}\right)^{\frac{N-n}{2}} = 2^n n \cdot \left(4 \cdot \frac{18}{37} \cdot \frac{19}{37}\right)^{\frac{N-n}{2}} = \\ & = 2^n n \cdot \left(\frac{1368}{1369}\right)^{\frac{N-n}{2}}. \end{aligned}$$

A $2^n n$ szám rögzített, és az utolsó hatványkitevő ∞ -hez tart, ha $N \rightarrow \infty$. Ezért

$$0 \leq P(\text{a bolyongás soha nem ér véget}) \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \left(2^n n \cdot \left(\frac{1368}{1369}\right)^{\frac{N-n}{2}}\right) = 0.$$

Tehát tényleg 0 a valószínűsége annak, hogy a játék soha nem ér véget.

1. megoldás – egyenletrendszerrel

Amikor a játék során éppen $0 < m < n$ egységünk van, a következő játékban ez $\frac{18}{37}$ valószínűséggel $(m + 1)$ -re növekszik, illetve $\frac{19}{37}$ valószínűséggel $(m - 1)$ -re csökken. A $m + 1$, illetve $m - 1$ egységgel folytatva $p(m + 1, n)$, illetve $p(m - 1, n)$ eséllyel érjük el az n egységnyi pénzt, tehát

$$(1) \quad p(m, n) = \frac{18}{37}p(m + 1, n) + \frac{19}{37}p(m - 1, n), \quad \text{ha } m = 1, 2, \dots, n - 1.$$

Ezen kívül 0 egységgel semmi esélyünk; ha pedig már n egységünk van, akkor játék nélkül, biztosan elértük a célt, így

$$(2) \quad p(0, n) = 0 \quad \text{és} \quad p(n, n) = 1.$$

Az (1) egy lineáris egyenletrendszert ad a most még ismeretlen $p(1, n), p(2, n), \dots, p(n - 1, n)$ számokra; ezt szeretnénk valamilyen barátságos formában megoldani.

Legyen $m = 0, 1, \dots, n - 1$ esetén $d_m = p(m + 1, n) - p(m, n)$, avagy $p(m, n) = d_0 + d_1 + \dots + d_{m-1}$, és alakítsuk át az (1) egyenletet a következőképpen:

$$\begin{aligned} (1') \quad & (18 + 19)p(m, n) = 18p(m + 1, n) + 19p(m - 1, n), \\ & 18d_{m-1} = 18(p(m, n) - p(m - 1, n)) = 19(p(m + 1, n) - p(m, n)) = 19d_m, \\ & d_m = \frac{19}{18}d_{m-1}. \end{aligned}$$

Az (1') egyenlet szerint az $d_1, d_2, \dots, d_n$ számok egy $\frac{19}{18}$ hányadosú mértani sorozatot alkotnak, így $d_m = \left(\frac{19}{18}\right)^m d_0$.

A (2) egyenletből és a mértani sorozat összegképletéből

$$p(k, n) = \frac{p(k, n)}{p(n, n)} = \frac{d_0 + d_1 + \dots + d_{k-1}}{d_0 + d_1 + \dots + d_{n-1}} = \frac{\left(\frac{19}{18}\right)^k - 1}{\left(\frac{19}{18}\right)^n - 1}.$$

A várható lépésszám meghatározásához felírhatunk egy, az (1)-hez hasonló összefüggést: m pénzzel indulva, 1 játék után $\frac{18}{37}$ eséllyel $m + 1$ egységünk lesz, és várhatóan további $\ell(m + 1, n)$ játékot játszunk, vagy pedig $\frac{19}{37}$ eséllyel $m - 1$ egységünk lesz, és várhatóan további $\ell(m - 1, n)$ játékot játszunk. Ezért

$$(3) \quad \ell(m, n) = 1 + \frac{18}{37}\ell(m + 1, n) + \frac{19}{37}\ell(m - 1, n), \quad \text{ha } m = 1, 2, \dots, n - 1.$$

Ha 0 vagy n egységünk van, akkor többé már nem játszunk, vagyis

$$(4) \quad \ell(0, n) = \ell(n, n) = 0.$$

A (3) egyenlet hasonlít az (1)-re; a plusz 1 taggal úgy bánunk el, hogy $\ell(m, n)$ -ből kivonunk egy lineáris kifejezést: valamilyen c konstanssal legyen $t(m, n) = \ell(m, n) - cm$. Ezt behelyettesítve (3)-ba,

$$\begin{aligned} t(m, n) + cm &= 1 + \frac{18}{37}(t(m + 1, n) + c(m + 1)) + \frac{19}{37}(t(m - 1, n) + c(m - 1)), \\ t(m, n) &= \frac{18}{37}t(m + 1, n) + \frac{19}{37}t(m - 1, n) + \left(1 - \frac{c}{37}\right). \end{aligned}$$

Kézenfekvő a c számot úgy választanunk, hogy az utolsó tag, $1 - \frac{c}{37}$ kiessen, ez a $c = 37$ választással lehetséges.

A (4) egyenletet is átírjuk; az új egyenletrendszerünk:

$$(3') \quad t(m, n) = \frac{18}{37}t(m + 1, n) + \frac{19}{37}t(m - 1, n), \quad \text{ha } m = 1, 2, \dots, n - 1;$$

$$(4') \quad t(0, n) = 0, \quad t(n, n) = -37n.$$

Ez viszont pontosan az (1)–(2) egyenletrendszer $(-37n)$ -szerese, így

$$t(k, n) = -37n \cdot p(k, n) = -37n \cdot \frac{\left(\frac{19}{18}\right)^k - 1}{\left(\frac{19}{18}\right)^n - 1},$$

és végül

$$\ell(k, n) = p(k, n) + 37k = 37k - 37n \cdot \frac{\left(\frac{19}{18}\right)^k - 1}{\left(\frac{19}{18}\right)^n - 1}.$$

A $p(k, n)$ és $\ell(k, n)$ értéke néhány konkrét esetben:

k	n	$p(k, n)$	$\ell(k, n)$
40	60	0,3123	786,66
87	100	0,4929	1395,32
88	100	0,5205	1330,08
987	1000	0,4952	18198,07
988	1000	0,5227	17217,24

Ezek szerint az 1. kérdésre a válasz $p(40, 60) \approx 0,3123$, vagyis Kassza Blankának körülbelül 31,23% esélye van, és várhatóan 786,66 menetet rulettezik. A 2. kérdésben $k = 88$ (!) a legkisebb kezdő pénzmennyiség, amellyel indulva 50%-nál nagyobb esélyünk van a 100 egység elérésére, mint a teljes csődre. Figyelemre méltó, hogy tetszőlegesen nagy kezdő pénzzel is 50%-nál alacsonyabb az esélyünk arra, hogy még 13 egység pénzt nyerjünk:

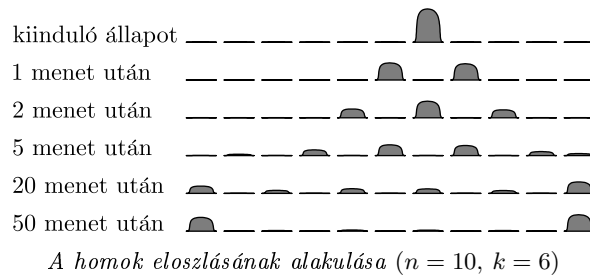
$$p(k, k + 13) = \frac{\left(\frac{19}{18}\right)^k - 1}{\left(\frac{19}{18}\right)^{k+13} - 1} < \frac{\left(\frac{19}{18}\right)^k - 1}{\left(\frac{19}{18}\right)^{k+13} - \left(\frac{19}{18}\right)^{13}} = \left(\frac{18}{19}\right)^{13} \approx 0,4952.$$

2. megoldás – invariánsokkal

Van egy $n + 1$ mezőből álló ugróiskolapályánk, megszámozva 0-tól n -ig. A pályán 1 kg homokot fogunk ide-oda sörprögetni; ez a homok lesz a „valószínűségi mezőnk” a mi „Markov-láncunkban”. A homokszemek jelentik a játék egy-egy lehetséges lefolyását. A homokszemek helye $0, 1, 2, \dots$ prögetés után azt fogja jelenteni, hogy éppen hány egység pénzünk van. A 0-dik mezőn és az n -edik mezőn álló homokszemek azokat a játéklefolyásokat jelentik, amikor már elfogyott a pénzünk, illetve már sikerült elérni az n egység vagyont.

A játékot k egységgel kezdjük, ezért a kezdeti állapotban a teljes 1 kg homok a k -edik mezőn áll, a többi mező üres. Mi történik egy ruletprögetéskor? Minden $m = 1, 2, \dots, n - 1$ esetén az m -edik mezőn álló homokkupacot kettéosztjuk: a kupac $\frac{18}{37}$ része „nyer”, ez átkerül az $(m + 1)$ -edik mezőre. A $\frac{19}{37}$ rész „veszít”, és az $(m - 1)$ -edik mezőre kerül át. Azok a homokszemek, amik a 0-dik vagy az n -edik mezőre kerülnek, ott is maradnak.

Ahogy repül az idő, egyre több homokszem kerül végső nyughelyére, a 0-dik vagy az n -edik mezőre. Mint láttuk, az $1, \dots, (n - 1)$ -edik mezőkön levő kupacok mérete 0-hoz konvergál. A játék határeloszlásában $p(k, n)$ kg homok lesz az n -edik mezőn, és $1 - p(k, n)$ kg homok lesz a 0-dik mezőn.



A homokkupacok méretéből kezdetben és minden pörgetés után is készítsünk egy-egy polinomot: ha a kupacok mérete $a_0, a_1, \dots, a_n$, akkor a polinomunk $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$. A kezdeti állapotban a polinom $f_0(x) = x^k$, a határesetben $f_\infty(x) = (1 - p(k, n)) + p(k, n)x^n$. Mikor egy pörgetésnél az m -edik kupacot kettéosztjuk, a következő csere történik:

$$x^m \mapsto \frac{19}{37}x^{m-1} + \frac{18}{37}x^{m+1}.$$

A változás $\frac{19 - 37x + 18x^2}{37}x^{m-1}$; a lényeg, hogy többszöröse a $19 - 37x + 18x^2$ polinomnak. Ennek a polinomnak két gyöke van: az 1 és a $\frac{19}{18}$.

Hogy változik egy pörgetés során a polinom értéke az $x = 1$ helyen? Sehoggy, mert $x = 1$ gyöke a $19 - 37x + 18x^2$ polinomnak. Tehát $f_{r+1}(1) = f_r(1)$; sőt ugyanez a határeloszlásra is igaz:

$$f_\infty(1) = f_0(1).$$

Persze ezt közvetlenül is megmondhattuk volna, mert a polinom értéke az $x = 1$ helyen a teljes homokmennyiség. Sokkal érdekesebb az $x = \frac{19}{18}$ helyen vett érték. Mivel $x = \frac{19}{18}$ a másik gyöke a $19 - 37x + 18x^2$ polinomnak, ez sem változik:

$$f_\infty\left(\frac{19}{18}\right) = f_0\left(\frac{19}{18}\right),$$

$$(1 - p(k, n)) + p(k, n) \cdot \left(\frac{19}{18}\right)^n = \left(\frac{19}{18}\right)^k.$$

Ebből $p(k, n)$ -t kifejezhetjük:

$$p(k, n) = \frac{\left(\frac{19}{18}\right)^k - 1}{\left(\frac{19}{18}\right)^n - 1}.$$

A várható lépésszámot a várható nyereményünkből fogjuk kiszámítani. A játék végén $p(k, n)$ valószínűséggel n egység pénzünk, illetve $1 - p(k, n)$ valószínűséggel 0 pénzünk lesz. Így a pénzünk várható értéke $p(k, n) \cdot n$, az összes nyereményünk várható értéke pedig $p(k, n) \cdot n - k$.

Másrészt, a várható $\ell(k, n)$ lépés mindegyikében $\frac{-1}{37}$ a várható nyereményünk, ez összesen $\ell(k, n) \cdot \frac{-1}{37}$. Tehát $p(k, n) \cdot n - k = \ell(k, n) \cdot \frac{-1}{37}$, rendezve

$$\ell(k, n) = 37(k - p(k, n) \cdot n).$$

Tanulság

Az az aprónak látszó előny, hogy a kaszinónak $\frac{1}{37}$ -del nagyobb esélye van, mint nekünk, valójában tetemes. Épp csak 52 százalék esélyünk van arra, hogy (valamikor, életünkben egyszer) 12 egység pluszba kerüljünk; a plusz 50 egyszeri elérésére még végtelen nagy hitel esetén is kevesebb, mint 7 százalék. A kaszinó lassan, türelmesen, de 1 valószínűséggel megkopasztja a vendégeket – meglepő, hogy a rendőrségi beszámolóban szereplő banki „tanácsadó” ezt nem tudta.

Felhasznált irodalom

[K] *B. 4419. feladat*. KöMaL 2012. január.

<http://www.komal.hu/verseny/feladat.cgi?a=feladat&f=B4419&l=hu>

[P] *Eljátszotta a bank pénzét*. Bács-Kiskun Megyei Rendőr-főkapitányság, 2017. jan. 7.

<http://www.police.hu/hirek-es-informaciok/legfrissebb-hireink/bunugyek/eljatszotta-a-bank-penzet>

- [I] *Eljátszotta a bank pénzét: 58 milliót bukott egy kecskeméti férfi.* Index, 2017. jan. 7.
http://index.hu/gazdasag/2017/01/07/58_milliot_bukott_szerencsejatekon_egy_kecskemeti_bankfiok_dolgozoja/
- [N] *Eljátszotta a bank pénzét egy alkalmazott.* Nők Lapja Café, 2017. jan. 7.
<http://www.nlcafe.hu/ezvan/20170107/bank-penze-szerencsejatek-alkalmazott-eljatszotta/>
- [F] Keleti Tamás: *Tippjáték a rulettezésről.* Facebook, 2017. jan. 11.
<https://www.facebook.com/tamas.keleti.79/posts/10154798837617435>