

I. rész

1. Adott a valós számok halmazán értelmezett f és g függvény:

$$f(x) = -x^2 - 3x + 4 \quad \text{és} \quad g(x) = x^2 + 2x - 3.$$

a) Adjuk meg az $f \circ g$ függvény hozzárendelési szabályát.

(Az összetett függvény definíciója: $f \circ g(x) = f(g(x))$.)

b) Van-e olyan x_0 hely, ahol az f és g függvényekhez húzható érintők párhuzamosak egymással?

c) Számítsuk ki az f és g függvények grafikonja által közbezárt korlátos terület nagyságát.

(14 pont)

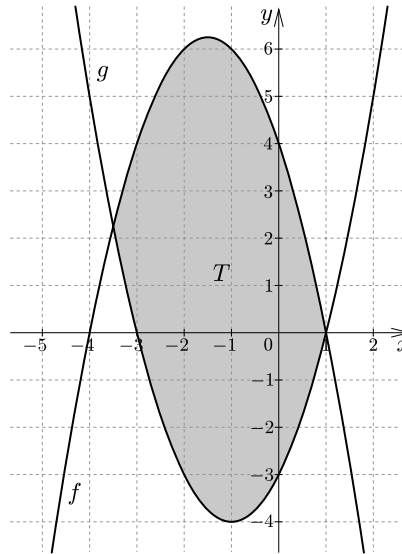
Megoldás. a)

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = -(x^2 + 2x - 3)^2 - 3(x^2 + 2x - 3) + 4 = -x^4 - 4x^3 - x^2 + 6x + 4.$$

b) Ha valamely x_0 helyen a két függvényhez húzható érintők párhuzamosak egymással, akkor $f'(x_0) = g'(x_0)$, vagyis $-2x_0 - 3 = 2x_0 + 2$, ahonnan $x_0 = -\frac{5}{4}$.

Tehát van ilyen x_0 hely: $x_0 = -\frac{5}{4}$.

c) Az f és g függvényt derékszögű koordináta-rendszerben ábrázolva az f függvény képe egy lefelé nyíló parabola, melynek két zérushelye -4 és 1 , a g függvény képe pedig egy felfelé nyíló parabola, melynek zérushelyei -3 és 1 .



A két függvény metszéspontjait (az integrálszámítás határait) az $f(x) = g(x)$ egyenlet gyökei adják: $-x^2 - 3x + 4 = x^2 + 2x - 3$, ahonnan $x_1 = -\frac{7}{2}$ és $x_2 = 1$.

A keresett T területet integrálszámítással határozhatjuk meg:

$$\begin{aligned} T &= \int_{-\frac{7}{2}}^1 (-x^2 - 3x + 4 - x^2 - 2x + 3) dx = \int_{-\frac{7}{2}}^1 (-2x^2 - 5x + 7) dx = \\ &= \left[-2 \cdot \frac{x^3}{3} - 5 \cdot \frac{x^2}{2} + 7x \right]_{-3.5}^1 = \frac{243}{8}. \end{aligned}$$

2. A derékszögű koordináta-rendszerben az ABC háromszög csúcsai: $A(-4; -3)$, $B(6; -3)$ és $C(1; 12)$.

a) Mennyi az $\vec{AS}$ és a $\vec{BS}$ vektorok skalárszorzata, ha S az ABC háromszög súlypontja?

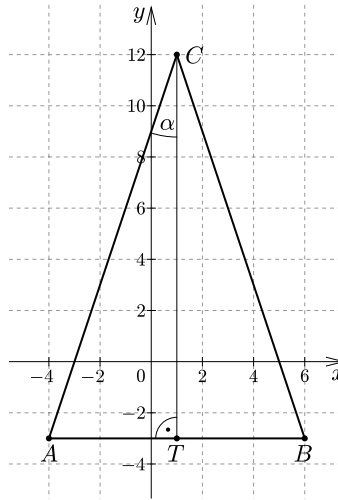
b) Mekkora és milyen irányú szöggel kell elforgatni az ABC háromszöget a C csúcs körül, hogy az AC oldal párhuzamos legyen az ordinát tengellyel? (11 pont)

Megoldás. a) Az ABC háromszög S súlypontjának koordinátái a csúcsok megfelelő koordinátáinak számtani közepe:

$$S \left(\frac{-4 + 6 + 1}{3}; \frac{-3 - 3 + 12}{3} \right) = (1; 2),$$

ezért $\overrightarrow{AS} = (5; 5)$, $\overrightarrow{BS} = (-5; 5)$, és így $\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{BS} = 0$.

b) Mivel az AB oldal párhuzamos az x tengellyel, ezért a háromszög CT magassága párhuzamos lesz az y tengellyel. Ha az ACT szöget α -val jelöljük, akkor a háromszöget a C csúcs körül éppen $+\alpha$ szöggel kell elforgatni, hogy az AC oldal párhuzamos legyen az y tengellyel.



Az ACT derékszögű háromszögben $\operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{15}$, ahonnan $\alpha \approx 18,43^\circ$.

Tehát az ABC háromszöget kb. $+18,43^\circ$ -os szöggel kell elforgatni a C csúcs körül.

3. Egy konyhán egy 5 literes kondérban tésztafőzésre forralnak vizet. A vízbe 50 gramm sót tettek, amit a főszakács sokall, ezért egy nagy fél literes merőkanállal kivesz az oldott sós vízből, és a helyére egy merőkanál tiszta vizet tesz. Alapos keverés után megkóstolja a vizet, de még mindig túl sósnak találja, ezért a sós vízből ismét kivesz fél litert, és a hiányt tiszta vízzel pótolja. A kóstolás után még egyszer utoljára megismétli az előbbi műveletet. Tételezzük fel, hogy minden művelet előtt a só egyenletesen oldódott, és a térfogat-növekedéstől, amit betétele okozott, tekintsünk el.

a) Mennyi só maradt a vízben? Az eredményt tizedgrammra kerekítve adjuk meg.

b) Hányszor kellene a fenti műveletet megismételni ahhoz, hogy legfeljebb 25 gramm só maradjon a vízben? (13 pont)

Megoldás. a) Mivel a kanál térfogata tizedrésze a kondér térfogatának, ezért a sótartalomnak is mindig a tizedét vesszük ki.

Az első lépésben kivett só mennyisége 5 gramm, hiszen fél liter vízben 5 gramm só van.

A második lépésben ismét a még meglevő sómennyiség tizedét vesszük ki, azaz $50 - 5 = 45$ grammból 4,5 grammot.

A harmadik lépésben már csak $45 - 4,5 = 40,5$ gramm só maradt a vízben, melynek tizedét kivéve 4,05 grammot veszünk ki.

Tehát a megmaradt só mennyisége $40,5 - 4,05 = 36,45$ gramm, ami egy tizedesjegyre kerekítve 36,5 gramm.

b) Ha a fenti folyamatban n lépést végzünk el, akkor az oldatban maradó só mennyiségét az $50 \cdot 0,9^n$ összefüggés adja meg, hiszen minden lépésben a megmaradt só mennyiségének 10%-át vesszük ki.

A feladat szövege alapján megoldandó az alábbi egyenlőtlenség:

$$50 \cdot 0,9^n \leq 25.$$

(Az egyenlőtlenséget rendezve, majd mindkét oldal tízes alapú logaritmusát véve:)

$$\lg 0,9^n \leq \lg 0,5.$$

(A logaritmus azonosságát felhasználva, majd rendezve:)

$$n \geq \frac{\lg 0,5}{\lg 0,9} \approx 6,58.$$

Mivel n csak egész szám lehet, ezért a folyamatot legalább 7-szer kell megismételni.

4. Egy gimnázium 9. osztályos tanulói év végén rendelték meg iskolájukban a következő tanévhez szükséges tankönyveket. Összesen 7 fajta könyvet rendelhettek, minden tantárgyból egyet-egyét. Minden gyerek kapott egy megrendelőlapot, ahol a megfelelő mezőbe tett **X** jellel jelezhette rendelési szándékát. (Az alábbi táblázatnak megfelelő diák a magyar, történelem és kémia könyveket rendelte meg.)

magyar	matematika	történelem	angol	földrajz	fizika	kémia
X		X				X

A tankönyvrendelések összesítésekor a tankönyvfelelős megállapította, hogy nem volt olyan tanuló, aki egyetlen könyvet sem rendelt és nem volt két olyan diák, akik pontosan ugyanazokat a könyveket rendelték volna meg.

a) Legfeljebb hány diák jár ennek az iskolának a 9. évfolyamára?

A 9.B. osztálynak 24 tanulója van, fiúk és lányok vegyesen. Az osztályból két tanulót véletlenszerűen kiválasztunk.

b) Hány fiú és hány lány jár az osztályba, ha annak a valószínűsége, hogy a kiválasztott diákok különböző neműek, a lehető legnagyobb? (13 pont)

Megoldás. a) *I. megoldás.* Mivel nem volt két olyan diák, akik pontosan ugyanazokat a könyveket rendelték meg, ezért azoknak a diákoknak a száma, akik pontosan egy darab könyvet rendelték legfeljebb 7.

Azoknak a diákoknak a száma, akik pontosan két darab könyvet rendelték legfeljebb $\binom{7}{2}$, hiszen 7 darab könyvből ennnyiféleképpen lehet kettőt kiválasztani.

Hasonló megfontolással számítható ki a három, négy, ..., hét darab könyvet rendelők maximális száma, ezért a 9. évfolyamra járó diákok száma legfeljebb

$$\binom{7}{1} + \binom{7}{2} + \binom{7}{3} + \binom{7}{4} + \binom{7}{5} + \binom{7}{6} + \binom{7}{7} = 127.$$

II. megoldás. A tanulók minden könyvről egyértelműen eldönthetik, hogy megrendelik-e vagy sem, ezért a lehetséges megrendelések (és egyben tanulók) száma legfeljebb $2^7 = 128$. Mivel olyan diák nem volt, aki egyetlen könyvet sem rendelt meg, ezért az évfolyamra legfeljebb $128 - 1 = 127$ tanuló járhat.

b) Jelölje a lányok számát l , a fiúkét f . A feladat szövege alapján $l + f = 24$. 24 tanulóból 2-t $\binom{24}{2}$ -féleképpen választhatunk ki, ezért az összes eset száma $\binom{24}{2}$. 1 lányt és 1 fiút $\binom{l}{1} \cdot \binom{f}{1}$ -féleképpen választhatunk ki, ezért a kedvező esetek száma $\binom{l}{1} \cdot \binom{f}{1}$. Az $l + f = 24$ összefüggést felhasználva a keresett valószínűség:

$$P = \frac{\binom{l}{1} \cdot \binom{f}{1}}{\binom{24}{2}} = \frac{l \cdot f}{276} = \frac{l \cdot (24 - l)}{276} = \frac{24l - l^2}{276} = \frac{144 - (l - 12)^2}{276}.$$

A tört értéke akkor maximális, ha a számlálóját maximális. A számlálóban lévő különbség akkor lesz a lehető legnagyobb, ha a négyzetes tag a legkisebb, azaz 0. Ebből következik, hogy $l = 12$ és $f = 12$.

Tehát 12 lány és 12 fiú jár az osztályba.

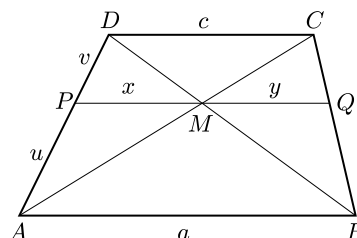
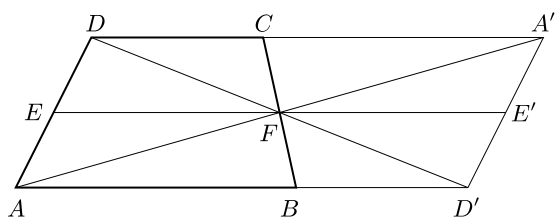
II. rész

5. Egy trapézban húzzuk be a középvonalat, majd az alapokkal párhuzamosan két szakaszt: az átlók metszéspontján áthaladó, illetve a trapéz területét felező szakaszt.

a) Igazoljuk, hogy a behúzott három szakasz hossza rendre az alapok számtani, harmonikus és négyzetes közepe.

b) Indokoljuk meg megfelelő ábra alapján az a) feladatban megadott három közép nagyságának sorrendjét. (16 pont)

Megoldás. a) Tükrözzük az $ABCD$ trapézt a BC szár F felezőpontjára. A tükrözés után kapott $AD'A'D$ négyszög paralelogramma, melyben $EE' = AD' = A'D = AB + CD$, illetve $EE' = 2EF$. Az előbbi két egyenlőségből $EF = \frac{AB + CD}{2}$, tehát a trapéz középvonalának hossza valóban az alapok hosszának számtani közepe.



Az ABD háromszög hasonló a PMD háromszöghöz, mert megfelelő szögeik egyenlők, ezért $\frac{x}{a} = \frac{v}{u+v}$.

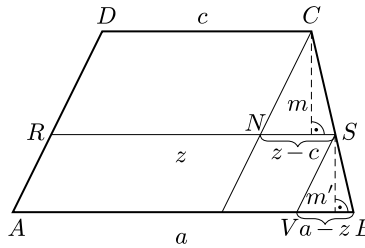
Az ADC háromszög hasonló az APM háromszöghöz, mert megfelelő szögeik egyenlők, ezért $\frac{x}{c} = \frac{u}{u+v}$.

Az előbbi két egyenlet megfelelő oldalait összeadva $\frac{x}{a} + \frac{x}{c} = \frac{v}{u+v} + \frac{u}{u+v} = 1$, melyből rendezéssel $x = \frac{ac}{a+c}$. Hasonló megfontolással belátható, hogy $y = \frac{ac}{a+c}$, így

$$PQ = x + y = \frac{2ac}{a+c},$$

tehát a trapéz átlóinak metszéspontján át húzott szakasz hossza az alapok harmonikus közepe.

Jelölje RS a trapéz alapjaival párhuzamos, annak területét felező szakaszt, melynek hossza z . Legyen az $RSCD$ trapéz magassága m , az $ABSR$ trapézé pedig m' . Húzzunk párhuzamost az AD szárral a C és az S pontokon keresztül, melyek az RS , illetve az AB szakaszt rendre az N , illetve a V pontban metszik.



A VBS háromszög hasonló az NSC háromszöghöz, mert megfelelő szögeik egyenlők, ezért

$$\frac{a-z}{z-c} = \frac{m'}{m}.$$

Mivel az $ABSR$ és $RSCD$ trapézok területe egyenlő, ezért $\frac{a+z}{2} \cdot m' = \frac{z+c}{2} \cdot m$.

Az előbbi két egyenletből $\frac{a-z}{z-c} = \frac{z+c}{a+z}$, melyet átrendezve $z^2 = \frac{a^2 + c^2}{2}$, ahonnan

$$z = \sqrt{\frac{a^2 + c^2}{2}}.$$

Tehát a trapéz területét felező, alapokkal párhuzamos szakasz hossza az alapok hosszának négyzetes közepe.

b) Mivel az ábrán $c < a$, ezért a trapéz területét felező szakasz a középvonal alatt, míg az átlók metszéspontján áthaladó szakasz a középvonal felett helyezkedik el. Ebből következik, hogy a három közép nagysága növekvő sorrendben: harmonikus, számtani, négyzetes.

6. Egy mobiltelefonokat gyártó cég minden évben ősszel jelenteti meg legújabb csúcskészülékét. Az újonnan kapható okostelefon kijelzőjén összesen 273 460 pixellel több képpont található, mint az egy évvel korábban megjelent azonos típusú régebbi telefonén. Ez azért van, mert az új telefon széltében 198, hosszában pedig 110 pixellel több képpontot tud kijelezni.

a) Mekkora (hányszor hány pixel) az új telefon képernyőfelbontása, ha a régebbi készülék kijelzőjén összesen 727 040 képpont található?

A gyártó cég szeretné a készülékeladásból származó bevételét maximalizálni, melyet az eladási ár megfelelő meghatározásával szeretne elérni. A cég vezetői az eddigi tapasztalatok alapján azt feltételezik, hogy ha a készüléket 120 000 Ft-ért árusítják, akkor mind az 1000 telefonra érkezik megrendelés, ha pedig az eladási árat 3 000 Ft-tal megemelik, akkor a rendelések száma 20 darabbal csökken, és minden további 3000 Ft-nyi emelés újabb 20 darabbal csökkenti a megrendelések számát.

b) Mennyi legyen a készülék eladási ára, hogy a cég bevétele maximális legyen ezen az eladáson? (16 pont)

Megoldás. a) Jelölje x és y a régebbi telefon kijelzőjén lévő vízszintes és függőleges képpontok számát. A feladat szövege alapján az alábbi egyenletrendszer írható fel:

$$\begin{aligned} x \cdot y &= 727\,040, \\ (x + 198) \cdot (y + 110) &= 1\,000\,500. \end{aligned}$$

A második egyenlet bal oldalán a kijelölt szorzást elvégezve, majd az egyenletet rendezve a következő (egyszerűbb) egyenletrendszerhez jutunk:

$$\begin{aligned} x \cdot y &= 727\,040, \\ 110x + 198y &= 251\,680. \end{aligned}$$

Az első egyenletből az egyik ismeretlent kifejezve, majd azt a második egyenletbe behelyettesítve rendezés és összevonás után a $99y^2 - 125840y + 39987200 = 0$ másodfokú egyenletet kapjuk, melynek gyökei $y_1 = 640$ és $y_2 = 631,1$. Utóbbi a törtrány miatt nyilván nem megoldása a feladatnak, ezért $x_1 = 1136$.

Ellenőrzés: A régebbi telefon kijelzőjén $1136 \cdot 640 = 727\,040$, míg az új telefon kijelzőjén $(1136 + 198) \cdot (640 + 110) = 1\,000\,500$ képpont található, ami valóban $273\,460$ pixellel több.

Tehát az új telefon képernyőfelbontása 1334×750 pixel.

b) Jelölje x a 3000 Ft-tal történő emelések számát. Ekkor a telefon ára

$$(120\,000 + 3000x) \text{ Ft,}$$

az eladott darabszám pedig $(1000 - 20x)$. A (B) bevétel ezer Ft-ban számolva:

$$B(x) = (120 + 3x) \cdot (1000 - 20x) = 60 \cdot (-x^2 + 10x + 2000).$$

Szélsőérték ott lehet, ahol $B'(x) = 0$, ezért $-2x + 10 = 0$, amiből $x = 5$. $x = 5$ esetén B' előjelet vált, tehát B -nek valóban maximuma van.

Tehát a bevétel akkor lesz maximális, ha a telefon árát $120\,000 + 5 \cdot 3000 = 135\,000$ Ft-ban határozzák meg.

7. a) Bizonyítsuk be, hogy nincs olyan hétpontú egyszerű gráf, amelyben minden pont fokszáma különböző.

b) Egy hétpontú egyszerű gráf csúcsai között egyetlen olyan van, melynek fokszáma még egyszer előfordul. Melyik lehet ez a fokszám? Adjunk meg egy, a feladat feltételeinek megfelelő gráfot. (16 pont)

Megoldás. a) I. megoldás. Egy hétpontú egyszerű gráfban egy pont fokszáma maximum 6 lehet (nincsenek hurok- és többszörös élek), ezért a hét pontra hét lehetőség jut: 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6. Ha van 6 fokszámú pont, akkor nem lehet 0 fokszámú, így csak két lehetőség marad: 0; 1; 2; 3; 4; 5 vagy 1; 2; 3; 4; 5; 6. Mivel 7 pontunk van, a skatulyaelv szerint az egyik fokszámnak legalább kétszer kell előfordulnia, így biztosan nincs a feladat feltételeinek megfelelő gráf.

II. megoldás. Egy hétpontú egyszerű gráfban, ha minden pont fokszáma különböző, akkor a csúcsok fokszámainak lehetséges értékei 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6 (nincsenek hurok- és többszörös élek). Mivel bármely egyszerű gráfban a fokszámok összege az élek számának kétszerese, ezért gráfunknak $\frac{21}{2} = 10,5$ éle lenne, ami nem lehetséges. Tehát valóban nincs a feladat feltételeinek megfelelő gráf.

b) Két eset lehetséges: 0; 1; 2; 3; 4; 5; x vagy 1; 2; 3; 4; 5; 6; x .

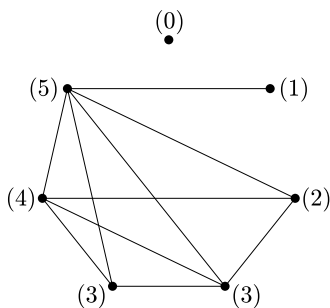
Nézzük először a 0; 1; 2; 3; 4; 5; x esetet.

x értéke nem lehet 0; 2; 4, hiszen ekkor a kapott gráfban a fokszámok összege páratlan lenne, ami a fokszámtétel miatt nem lehetséges.

x értéke nem lehet 5 sem, ugyanis ekkor mindkét 5 fokszámú csúcs az izolált pont kivételével mindegyik másikkal össze lenne kötve, így nem lenne 1 fokszámú csúcs.

x továbbá 1 sem lehet, mert ebben az esetben az 5 fokszámú csúcs hasonlóan össze van kötve az izolált pont kivételével mindegyik másikkal, az 1 fokszámú csúcsok pedig csak az 5 fokszámúval. Ebből következik, hogy már csak az a kérdés, hogy a 2, 3 és 4 fokszámú csúcsok melyik másik csúcsokkal lehetnek összekötve. Mivel az 5 fokszámú csúccsal az előbbi csúcsok mindegyike össze van kötve, ezért a 0, az 1 és az 5 fokszámú négy csúcsot elhagyva egy önálló, 1, 2, 3, fokszámú hárompontú egyszerű gráfot kapnánk, mely nyilván nem lehetséges, hiszen a gráf egyszerű.

Tehát csak a 3-as fokszám ismétlődhet, így a feladat feltételeinek megfelelő gráf:



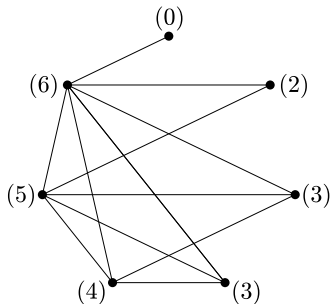
Nézzük a második esetet: 1; 2; 3; 4; 5; 6; x .

x értéke hasonlóan nem lehet 2; 4; 6, hiszen ekkor a kapott gráfban a fokszámok összege ismét páratlan lenne, ami a fokszámtétel miatt szintén nem lehetséges.

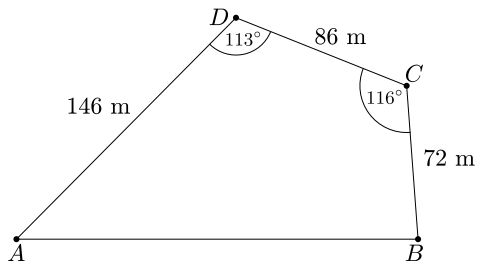
x értéke ugyancsak nem lehet 5, ugyanis ekkor mindkét 5 fokszámú csúcsot össze kellene kötni a 2 fokszámú csúccsal, ami nem lehetséges, hiszen a 6 fokszámú csúcs biztosan össze van kötve vele, és így a fokszáma 3 lenne.

x továbbá 1 sem lehet, hiszen ha az előbbi eset megfontolásához hasonlóan a gráfból elhagyjuk a 6 és a két 1 fokszámú csúcsokat, akkor egy négypontú, önálló egyszerű gráfot kapunk, melynek fokszámai 1-gyel csökkennek, azaz 1, 2, 3, 4, lesznek, ami ismét nem lehetséges, hiszen egy négypontú egyszerű gráfban nem lehet 4 fokszámú csúcs.

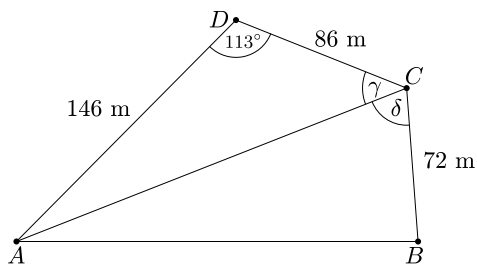
Tehát ebben az esetben is csak a 3-as fokszám ismétlődhet, így a feladat feltételeinek megfelelő gráf:



8. A mellékelt ábrán látható négyszög két szögét (113 és 116 fok) és három oldalát (146, 86 és 72 m) ismerjük. Mekkora a négyszög területe? (16 pont)



I. megoldás. Bontsuk fel az $ABCD$ négyszöget két háromszögre!



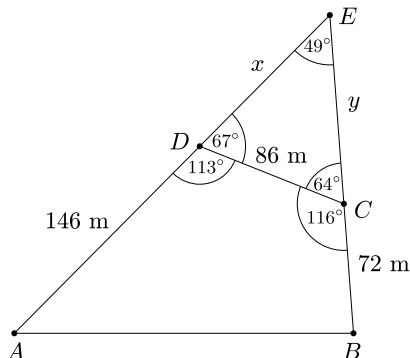
Az ACD háromszögből koszinusztétellel $AC = \sqrt{146^2 + 86^2 - 2 \cdot 146 \cdot 86 \cdot \cos 113^\circ} \approx 196,28$ (m).

Az ACD háromszögben alkalmazva a szinusztételt $\frac{\sin \gamma}{\sin 113^\circ} = \frac{146}{196,28}$, ahonnan ($\gamma < 90^\circ$ miatt) $\gamma \approx 43,21^\circ$. Ekkor az ABC háromszögben $\delta = 116^\circ - \gamma \approx 72,79^\circ$.

Az $ABCD$ négyszög területe az ABC és CDA háromszögek területének összege:

$$T = T_{ABC} + T_{CDA} = \frac{72 \cdot 196,28 \cdot \sin 72,79^\circ}{2} + \frac{146 \cdot 86 \cdot \sin 113^\circ}{2} \approx 6749,42 + 5778,93 \approx 12\,528 \text{ m}^2.$$

II. megoldás. Egészítsük ki az $ABCD$ négyszöget háromszöggé.



Az EDC háromszög ismeretlen szögei:

$$\angle EDC = 180^\circ - 113^\circ = 67^\circ,$$

$$\angle ECD = 180^\circ - 116^\circ = 64^\circ,$$

$$\angle DEC = 180^\circ - (64^\circ + 67^\circ) = 49^\circ.$$

Alkalmazzuk az EDC háromszögben a szinusztételt:

$$\frac{x}{86} = \frac{\sin 64^\circ}{\sin 49^\circ},$$

amiből $x \approx 102,42$ (m), és

$$\frac{y}{86} = \frac{\sin 67^\circ}{\sin 49^\circ},$$

ahonnan $y \approx 104,89$ (m), így $AE = 146 + x \approx 248,42$ (m) és $BE = 72 + y \approx 176,89$ (m).

Az $ABCD$ négyszög területe az ABE és CDE háromszögek területének különbsége:

$$\begin{aligned} T &= T_{ABE} - T_{CDE} = \frac{248,42 \cdot 176,89 \cdot \sin 49^\circ}{2} - \frac{102,42 \cdot 104,89 \cdot \sin 49^\circ}{2} \approx \\ &\approx 16\,582,25 - 4053,9 \approx 12\,528 \text{ m}^2. \end{aligned}$$

9. Egy városban a fiatalok körében vizsgáldták a futballrajongók és az agresszív viselkedésre hajlamos személyek között. A következőket állapították meg:

- Az agresszivitást mutató fiatalok 70%-a futballrajongó.
- Az agresszívnek nem mondhatók között csupán 30% futballrajongó van.
- A futballrajongók 60%-a mutat agresszivitást.

a) A város fiataljainak hány százaléka futballrajongó?

b) Mennyire jellemzi a várost a fiatalok agresszivitása?

c) A futballrajongó agresszív fiatalok a mérkőzések kb. 15%-ában okoznak nagyobb rendőrségi problémát. Mekkora annak a valószínűsége, hogy három mérkőzésen is megússza a helyi rendőrség a beavatkozást, ha feltehetjük, hogy az egyes mérkőzéseken kitört botrányok egymástól függetlenek? (16 pont)

Megoldás. a) *I. megoldás.* Jelölje A az agresszívek, F pedig a futballrajongók csoportját. Ekkor a feladat szövege alapján: $P(F | A) = 0,7$, $P(F | \bar{A}) = 0,3$ és $P(A | F) = 0,6$, ahol $P(F)$ értékét keressük.

A feltételes valószínűség definíciója alapján

$$P(F | A) = \frac{P(FA)}{P(A)} = 0,7,$$

$$P(F | \bar{A}) = \frac{P(F\bar{A})}{1 - P(A)} = \frac{P(F) - P(FA)}{1 - P(A)} = 0,3 \quad \text{és}$$

$$P(A | F) = \frac{P(FA)}{P(F)} = 0,6.$$

A harmadik egyenletből $P(FA)$ valószínűségét beírva a második egyenletbe

$$\frac{0,4P(F)}{1 - P(A)} = 0,3.$$

Az első és harmadik egyenletből $0,6P(F) = 0,7P(A)$, vagyis $P(A) = \frac{6}{7}P(F)$, így

$$\frac{0,4P(F)}{1 - \frac{6}{7}P(F)} = 0,3, \quad \text{azaz} \quad \frac{2}{5}P(F) = \frac{3}{10} - \frac{9}{35}P(F),$$

ahonnan $\frac{23}{35}P(F) = \frac{3}{10}$, amiből $P(F) = \frac{21}{46} \approx 0,46$, tehát a város fiataljainak körülbelül 46%-a futballrajongó.

II. megoldás. Vegyünk 10 agresszív fiatal, akik közül 7 futballrajongó. Ha n nem agresszív fiatal van, akkor ezek között $0,3n$ fő futballrajongó. Viszont a 7 agresszív futballrajongó 60%-a az összes futballrajongónak, vagyis $7 = (7 + 0,3n) \cdot 0,6 = 4,2 + 0,18n$, ahonnan $n = \frac{140}{9}$.

Ahhoz, hogy n egész szám legyen, mindent 9-cel kell szorozni, tehát 90 agresszív fiatalból 63 fő futballrajongó, és 140 nem agresszív 42 fő. E szerint a futballrajongók száma 105, ami a 230-nak kb. 46%-a, ami nyilván független a város lakosságától, hiszen az arány nem változik.

b) $P(A)$ valószínűségét keressük:

$$P(A) = \frac{6}{7} \cdot \frac{21}{46} = \frac{9}{23} \approx 0,39,$$

tehát a város fiataljainak kb. 39%-a agresszív.

c) Mivel az egyes mérkőzéseken kitört botrányok egymástól függetlenek, ezért $0,85^3 \approx 0,61$ annak a valószínűsége, hogy a helyi rendőrség megússza a beavatkozást.