

I. rész

1. Adott a valós számok halmazán értelmezett f és g függvény:

$$f(x) = -x^2 - 3x + 4 \quad \text{és} \quad g(x) = x^2 + 2x - 3.$$

a) Adjuk meg az $f \circ g$ függvény hozzárendelési szabályát.

(Az összetett függvény definíciója: $f \circ g(x) = f(g(x))$.)

b) Van-e olyan x_0 hely, ahol az f és g függvényekhez húzható érintők párhuzamosak egymással?

c) Számítsuk ki az f és g függvények grafikonja által közbezárt korlátos terület nagyságát.

(14 pont)

2. A derékszögű koordináta-rendszerben az ABC háromszög csúcsai:

$A(-4; -3)$, $B(6; -3)$ és $C(1; 12)$.

a) Mennyi az AS és a BS vektorok skalárszorzata, ha S az ABC háromszög súlypontja?

b) Mekkora és milyen irányú szöggel kell elforgatni az ABC háromszöget a C csúcs körül, hogy az AC oldal párhuzamos legyen az ordinátatengellyel?

(11 pont)

3. Egy konyhán egy 5 literes kondérban tésztafőzésre forralnak vizet. A vízbe 50 gramm sót tettek, amit a főszakács sokall, ezért egy nagy fél literes merőkanállal kivesz az oldott sós vízből, és a helyére egy merőkanál tiszta vizet tesz. Alapos keverés után megkóstolja a vizet, de még mindig túl sósnak találja, ezért a sós vízből ismét kivesz fél litert, és a hiányt tiszta vízzel pótolja. A kóstolás után még egyszer utoljára megismétli az előbbi műveletet. Tételezzük fel, hogy minden művelet előtt a só egyenletesen oldódott, és a térfogat-növekedéstől, amit betétele okozott, tekintsünk el.

a) Mennyi só maradt a vízben? Az eredményt tizedgrammra kerekítve adjuk meg.

b) Hányszor kellene a fenti műveletet megismételni ahhoz, hogy legfeljebb 25 gramm só maradjon a vízben?

(13 pont)

4. Egy gimnázium 9. osztályos tanulói év végén rendelték meg iskolájukban a következő tanévhez szükséges tankönyveket. Összesen 7 fajta könyvet rendelhettek, minden tantárgyból egyet-egyet. Minden gyerek kapott egy megrendelőlapot, ahol a megfelelő mezőbe tett **X** jellel jelezhette rendelési szándékát. (Az alábbi táblázatnak megfelelő diák a magyar, történelem és kémia könyveket rendelte meg.)

magyar	matematika	történelem	angol	földrajz	fizika	kémia
X		X				X

A tankönyvrendelések összesítésekor a tankönyvfelelős megállapította, hogy nem volt olyan tanuló, aki egyetlen könyvet sem rendelt és nem volt két olyan diák, akik pontosan ugyanazokat a könyveket rendelték volna meg.

a) Legfeljebb hány diák jár ennek az iskolának a 9. évfolyamára?

A 9.B. osztálynak 24 tanulója van, fiúk és lányok vegyesen. Az osztályból két tanulót véletlenszerűen kiválasztunk.

b) Hány fiú és hány lány jár az osztályba, ha annak a valószínűsége, hogy a kiválasztott diákok különböző neműek, a lehető legnagyobb?

(13 pont)

II. rész

5. Egy trapézban húzzuk be a középvonalat, majd az alapokkal párhuzamosan két szakaszt: az átlók metszéspontján áthaladó, illetve a trapéz területét felező szakaszt.

a) Igazoljuk, hogy a behúzott három szakasz hossza rendre az alapok számtani, harmonikus és négyzetes közepe.

b) Indokoljuk meg megfelelő ábra alapján az a) feladatban megadott három közép nagyságának sorrendjét. (16 pont)

6. Egy mobiltelefonokat gyártó cég minden évben ősszel jelenteti meg legújabb csúcskészülékét. Az újonnan kapható okostelefon kijelzőjén összesen 273 460 pixellel több képpont található, mint az egy évvel korábban megjelent azonos típusú régebbi telefonén. Ez azért van, mert az új telefon szélterében 198, hosszában pedig 110 pixellel több képpontot tud kijelezni.

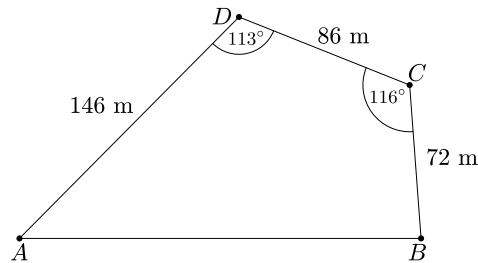
a) Mekkora (hányszor hány pixel) az új telefon képernyőfelbontása, ha a régebbi készülék kijelzőjén összesen 727 040 képpont található?

A gyártó cég szeretné a készülékeladásból származó bevételét maximalizálni, melyet az eladási ár megfelelő meghatározásával szeretne elérni. A cég vezetői az eddigi tapasztalatok alapján azt feltételezik, hogy ha a készüléket 120 000 Ft-ért árusítják, akkor mind az 1000 telefonra érkezik megrendelés, ha pedig az eladási árat 3 000 Ft-tal megemelik, akkor a rendelések száma 20 darabbal csökken, és minden további 3000 Ft-nyit emelés újabb 20 darabbal csökkenti a megrendelések számát.

b) Mennyi legyen a készülék eladási ára, hogy a cég bevétele maximális legyen ezen az eladáson?

(16 pont)

7. a) Bizonyítsuk be, hogy nincs olyan hétpontú egyszerű gráf, amelyben minden pont fokszáma különböző.
b) Egy hétpontú, különböző fokszámú egyszerű gráf csúcsai között egyetlen olyan van, melynek fokszáma még egyszer előfordul. Melyik lehet ez a fokszám? Adjunk meg egy, a feladat feltételeinek megfelelő gráfot. (16 pont)
8. A mellékelt ábrán látható négyszög két szögét (113° és 116°) és három oldalát (146, 86 és 72 m) ismerjük. Mekkora a négyszög területe? (16 pont)



9. Egy városban a fiatalok körében vizsgálták a futballrajongók és az agresszív viselkedésre hajlamos személyek között. A következőket állapították meg:
- Az agresszivitást mutató fiatalok 70%-a futballrajongó.
 - Az agresszívnek nem mondhatók között csupán 30% futballrajongó van.
 - A futballrajongók 60%-a mutat agresszivitást.
- a) A város fiataljainak hány százaléka futballrajongó?
b) Mennyire jellemzi a várost a fiatalok agresszivitása?
c) A futballrajongó agresszív fiatalok a mérkőzések kb. 15%-ában okoznak nagyobb rendőrségi problémát. Mekkora annak a valószínűsége, hogy három mérkőzésen is megússza a helyi rendőrség a beavatkozást, ha feltehetjük, hogy az egyes mérkőzéseken kitört botrányok egymástól függetlenek? (16 pont)