7. Egy geometriai nagyágyú

Az eddigi temérdek analízis és algebra után következzen most egy geometriai okoskodás, amelynek ötlete a [10] cikkből származik és egy – a versenyfeladatokon edződöttek számára vélhetően jól ismert – nevezetes geometriai egyenlőtlenségre támaszkodik. (Az alábbiakban kissé pongyolán sokszög oldalának mérőszáma helyett egyszerűen az oldalról fogunk beszélni.)

7.1. tétel (Ptolemaiosz-egyenlőtlenség) *A síkon bármely konvex négyszögben a szemközti oldalak szorzatának összege legalább akkora, mint az átlók szorzata. Egyenlőség csakis húrnégyszögben teljesül.*

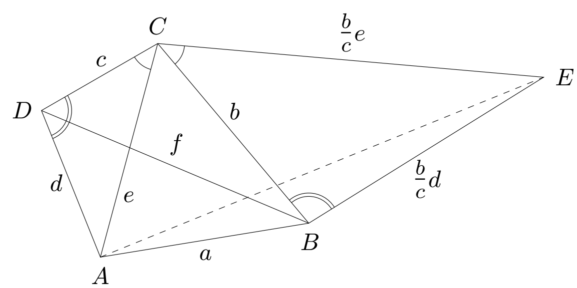
Bizonyítás. Tekintsük a *9. ábrán* látható $ABCD$ konvex négyszöget, amelynek oldalai $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, az átlói pedig $AC = e$, $BD = f$. Ekkor azt kell igazolnunk, hogy

$$ac + bd \geq ef.$$

Emeljünk a BC oldalra a CDA háromszöggel hasonló CBE háromszöget úgy, hogy $ACD\sphericalangle = ECB\sphericalangle$ és $CDA\sphericalangle = CBE\sphericalangle$ (más szóval alkalmazzunk C középpontú forgatva nyújtást az ACD háromszögre úgy, hogy CD képe CB legyen). A hasonlóság aránya $CB/CD = b/c$, ezért $CE = \frac{b}{c}e$ és $BE = \frac{b}{c}d$. Vegyük észre, hogy ekkor a CAE és CDB háromszögek szintén hasonlók, mert $BCD\sphericalangle = ECA\sphericalangle$ és $CE/CB = CA/CD = e/c$. Következésképpen $AE/DB = e/c$, vagyis $AE = \frac{e}{c}f$. Mivel az ABE háromszögben az AB és BE oldalak összege legalább akkora, mint AE, így

$$a + \frac{b}{c}d \geq \frac{e}{c}f,$$

amiből c-vel való beszorzás után éppen a bizonyítandó egyenlőtlenség adódik. Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha az ABE háromszög elfajuló, azaz $ABC\sphericalangle + CBE\sphericalangle = 180°$. Ez azt jelenti, hogy az $ABCD$ négyszögben a B és D csúcsoknál lévő belső szögek összege $180°$, tehát $ABCD$ húrnégyszög. □



9. ábra

7.2. történeti megjegyzés. Klaudiosz Ptolemaiosz a Kr. e. II. századi Alexandriában élt matematikus, csillagász, földrajztudós, a geocentrikus – a Földet a világegyetem középpontjának tekintő – világkép megalkotója. Az Almageszt című műve az ókori csillagászat legfontosabb tudományos forrása, amely a benne található trigonometriai számítások szempontjából is kiemelkedő jelentőségű. Ebben igazolta Ptolemaiosz többek között azt, hogy húrnégyszögben az átlók szorzata a szemközti oldalak szorzatainak összege.

7.3. megjegyzés. E kicsit talán hosszabb lélegzetvételűre nyúló megjegyzésben a Ptolemaiosz-egyenlőtlenség bizonyítása kapcsán hívjuk fel a figyelmet néhány észrevételre, általánosításra. Első olvasáskor nyugodtan a hómezős feladat megoldásához lehet ugrani.

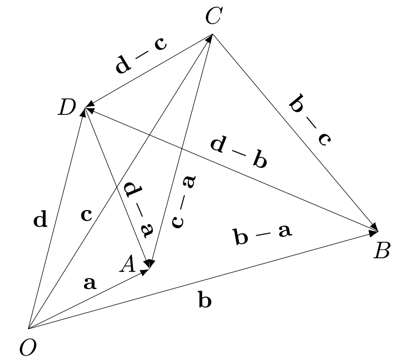
Az előbbi bizonyítás apró finomításával nem nehéz igazolni (lásd [5, 12.14. feladat]), hogy tetszőleges A, B, C, D síkbeli pontnégyesre igaz

$$AB \cdot CD + BC \cdot DA \geq AC \cdot BD,$$

ahol egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha a négy pont egy körön (vagy egyenesen) helyezkedik el és azon az AC pontpár elválasztja a BD pontpárt. Sőt, megmutatható, hogy bármely nem egy síkban fekvő pontnégyes esetén szigorú egyenlőtlenség áll fenn (erről lásd a [12] könyv 5.8. szakaszát).

A Ptolemaiosz-egyenlőtlenségnek a fentitől különböző, a Simson-egyenes bizonyos tulajdonságára épülő bizonyítása olvasható a [2] könyvben. Számos feladat között böngészhetünk a [6] írásban, ahol az egyenlőtlenség egy általánosítása – a Casey-tétel, amelyben a csúcsok szerepét érintő körök, az oldalakét pedig érintők veszik át – ugyancsak terítékre kerül.

Végül nem tudunk ellenállni a kísértésnek, hogy röviden szót ejtsünk a Ptolemaiosz-egyenlőtlenség komplex számok segítségével történő igen elegáns igazolásáról. Tekintsük az A, B, C, D pontoknak megfelelő $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$ komplex számokat a komplex számsíkon (lásd *10. ábra*), azaz például $\mathbf{a} = a_1 + a_2\mathrm{i}$, ahol a_1 a valós, a_2 pedig a képzetes rész.



10. ábra

A komplex számok közötti szorzás a valós számok szorzásához hasonlóan viselkedik $\mathrm{i}^2 = -1$ figyelembevételével:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (a_1 + a_2\mathrm{i})(b_1 + b_2\mathrm{i}) = a_1b_1 - a_2b_2 + (a_1b_2 + a_2b_1)\mathrm{i}.$$

Induljunk ki most a könnyen ellenőrizhető

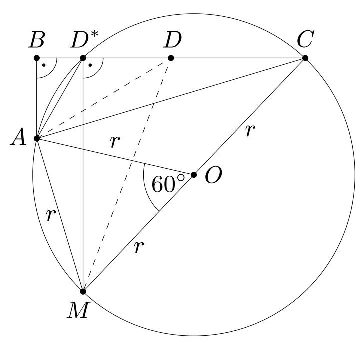
$$(\mathbf{a} - \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{d}) = (\mathbf{a} - \mathbf{d}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{c}) + (\mathbf{d} - \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}) \tag{7.1}$$

azonosságból. Vegyük észre (ismét lásd a 10. ábrát), hogy $\mathbf{a} - \mathbf{c}$ és $\mathbf{b} - \mathbf{d}$ az $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{DB}$ átlóvektorok, továbbá $\mathbf{a} - \mathbf{d}$ és $\mathbf{b} - \mathbf{c}$, illetve $\mathbf{d} - \mathbf{c}$ és $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ rendre a $\overrightarrow{DA}$ és $\overrightarrow{CB}$, illetve $\overrightarrow{CD}$ és $\overrightarrow{AB}$ szemközti oldalvektorok. Ekkor (7.1) mindkét oldalán abszolút értékét véve, majd alkalmazva a háromszög-egyenlőtlenséget:

$$|\mathbf{a} - \mathbf{c}| \cdot |\mathbf{b} - \mathbf{d}| \leq |\mathbf{a} - \mathbf{d}| \cdot |\mathbf{b} - \mathbf{c}| + |\mathbf{d} - \mathbf{c}| \cdot |\mathbf{b} - \mathbf{a}|,$$

ami éppen a Ptolemaiosz-egyenlőtlenség. Az egyenlőség esetét egyáltalán nem nyilvánvaló kiolvasni a bizonyításból, ebben az úgynevezett kettősviszony segíthet, bővebben lásd például [11, 31. feladat], [12, 12.5. szakasz], ahol a komplex számok egyéb geometriai alkalmazásáról is olvashatunk.

A hómezős feladat megoldása. Ennyi előkészület után térjünk vissza a hómezős feladat megoldására, most a Ptolemaiosz-egyenlőtlenség segítségével. Tekintsük a *11. ábrát,* ahol legyen D^* a BC szakasz azon pontja, amelyre $BAD^*\sphericalangle = 30°$ (a korábbiak fényében tudjuk, hogy ez fogja adni a minimumot). Rajzoljuk meg az A, D^* és C pontokon átmenő kört, amelynek középpontja legyen O, sugara pedig r, és a D^* pontban a BC szakaszra állított merőleges egyenes messe a kört az M pontban.



11. ábra

A Thalész-tétel miatt ekkor MC átmérő a körben, tehát $MC = 2r$. Másrészt a kerületi és középponti szögek tétele miatt

$$MOA\sphericalangle = 2MD^*A\sphericalangle = 2BAD^*\sphericalangle = 60°$$

($BAD^*\sphericalangle$ és $MD^*A\sphericalangle$ fordított állásúak), vagyis az MOA egyenlő szárú háromszög szabályos, így $AM = r$. Ha D a BC szakasz tetszőleges pontja, akkor az $AMCD$ konvex négyszögben a Ptolemaiosz-egyenlőtlenség szerint

$$AD \cdot MC + AM \cdot DC \geq AC \cdot MD,$$

azaz

$$2r \cdot AD + r \cdot DC \geq AC \cdot MD.$$

Minthogy MD^* átfogó az MDD^* (esetleg elfajuló) derékszögű háromszögben, ezért $MD \geq MD^*$, így

$$AD + \frac{DC}{2} \geq \frac{AC \cdot MD^*}{2r},$$

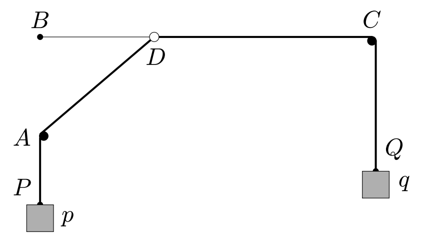
ahol a jobb oldal a D pont választásától független állandó. Egyenlőség pontosan akkor van, ha $ADMC$ húrnégyszög, vagyis $D = D^*$. Ezzel sokadjára beláttuk, hogy az (1.2) kifejezés minimumhelyét a D^* pont adja, tehát a gyalogosnak itt kell kimennie az országútra.

Akiknek elnyerte tetszését a húrnégyszögek világa, azok a [3] könyvben indulhatnak a meghódításukra, ezenkívül pedig ajánljuk a szakaszban már korábban említett $[2, 6, 11, 12]$ olvasnivalókat.

8. Besegít a mechanika

Zárásként a hómezős feladatot mechanikai köntösbe bújtatjuk, amelynek ötlete *Pólya György* – világhírű matematikus, a matematikai gondolkodás és problémamegoldás tudományának kiemelkedő tanár- és tudósegyénisége – [9] könyvének 9. fejezetében is szerepel, ahol számos egyéb szélsőérték-feladat fizikai szemléletű megoldása olvasható élvezetes stílusban.

Képzeljük el, hogy a *12. ábrán* látható módon a vízszintes helyzetű BC (tökéletesen merev) rúdra felfűzve szabadon (súrlódásmentesen) csúszhat a D gyűrű. A gyűrűhöz egy $DAP = \ell_1$ és egy $DCQ = \ell_2$ (elegendő) hosszúságú (nyújthatatlan) kötelet kötünk, amelyeket rendre az A és B pontokban rögzített csigákon átvetünk, majd ezután a P, illetve Q végükre egy p, illetve q súlyú testet helyezünk, ahol a súlyok arányát később választjuk meg. (A szokásos módon a gyűrűt, a csigákat és a súlyokat is pontszerűnek tekintjük, a kötél súlyát és a súrlódást pedig elhanyagoljuk.)



12. ábra

Magára hagyva a rendszert egy idő után beáll az egyensúlyi helyzetébe, amelyben a helyzeti energiája minimális. A BC rudat véve a viszonyítási szintnek a p súlyú test $(-BP)$ magasságban található, ezért a helyzeti energiája $(-BP{\cdot}p)$; ehhez hasonlóan a q súlyú test helyzeti energiája $(-CQ{\cdot}q)$. A rendszer helyzeti energiája tehát a $BP{\cdot}p+CQ{\cdot}q$ kifejezés ellentettje, amely akkor lesz a lehető legkisebb, ha $BP \cdot p + CQ \cdot q$ maximális. Minthogy $BP = BA + AP$ és $AP = \ell_1 - AD$, $CQ = \ell_2 - DC$, ezért

$$\begin{aligned} BP \cdot p + CQ \cdot q &= BA \cdot p + (\ell_1 - AD) \cdot p + (\ell_2 - DC) \cdot q = \\ &= (\ell_1 p + \ell_2 q + BA \cdot p) - (AD \cdot p + DC \cdot q). \end{aligned}$$

Itt az $\ell_1 p + \ell_2 q + BA \cdot p$ mennyiség állandó, így egyensúlyi helyzetben az

$$AD \cdot p + DC \cdot q$$

kifejezés minimális. Ha most a súlyok arányát úgy választjuk meg, hogy $q = p/2$, akkor a

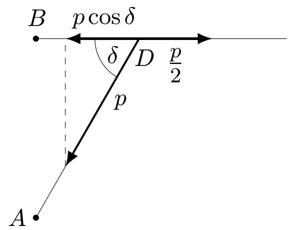
$$p \cdot \left(AD + \frac{DC}{2} \right)$$

kifejezés minimumhelye adja egyensúly esetén a D pont helyzetét. De ez (1.1) alapján éppen megegyezik a hómezős feladatbeli út megtételéhez szükséges idővel, ha $p = 1/v$. Így tehát a mechanikai problémabeli egyensúlyi helyzet megfelel a hómezős feladat időben legrövidebb útjának. Szerencsére a mechanikai rendszer egyensúlyi helyzetét nemcsak energiákkal, hanem a gyűrűre ható erők eredőjének segítségével szintén jellemezhetjük, ezáltal a minimumhely egy másik leírását nyerjük.

Tudjuk, hogy egyensúlyi helyzetben a gyűrűre ható erők kiegyenlítik egymást. Mivel a súlyok húzását a kötelek és a csigák változatlanul közvetítik, ezért a gyűrűre egy p és egy $p/2$ nagyságú erő hat a két kötél irányában, lásd a *13. ábrát.* A gyűrű nyugalomban van, így ezen két erő vízszintes összetevői semlegesítik egymást (függőlegesen pedig a rúd merevségéből származó erő ellensúlyozza a p nagyságú erő hatását). Ha $ADB\sphericalangle = \delta$, akkor az A csiga irányában ható erő vízszintes kompenense $p \cos \delta$ nagyságú. A B csiga irányában a vízszintes $p/2$ nagyságú erő hat, így szükségképpen

$$\frac{p}{2} = p \cos \delta,$$

vagyis $\cos \delta = 1/2$, tehát $\delta = 60^\circ$. Ez azt jelenti, hogy egyensúlyi helyzetben $ADB\sphericalangle = 60^\circ$, és az előbb meggondoltak tükrében a hómezős feladatban szintén ez a D pont szolgáltatja az időben legrövidebb utat.



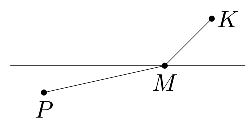
13. ábra

A fizika matematikai alkalmazásaira további meglepő példákat láthatunk a [8] könyvben, ahol a hómezős feladat optikai és mechanikai megközelítéséről is bővebben olvashatunk. Ajánljuk továbbá az [1] cikket, amely elektromos ellenállások hálózatait hívja segítségül különböző egyenlőtlenségek, köztük a számtani és harmonikus közép közötti egyenlőtlenség igazolásához.

9. Irány Kukutyin és Piripócs

A cikk elején beharangozott megoldások sora véget ért, de a lehetséges okoskodások tárháza alighanem kimeríthetetlen. Érdemes tovább keresgélni és a közöttük lévő kapcsolatokat feltérképezni, valamint megvizsgálni, mi a helyzet abban az esetben, ha a gyalogos sebessége c-szer ($c > 0$) akkora az országúton, mint a hómezőn (az országúton akár lassabban is mehet). Egy általánosítási lehetőség az érdeklődő és elszánt Olvasók számára a következő.

Feladat. Kukutyin és Piripócs egy egyenes autópálya két különböző oldalán helyezkedik el (lásd *14. ábra*). Az autópálya egy M pontjából leágazásokat építenek a két városhoz. Az építési költség Kukutyin felé c-szer akkora, mint Piripócs felé (ahol $c > 0$). Hol legyen az M pont, hogy az útépítés összköltsége minimális legyen?



14. ábra

A $c = 1$ eset megoldása nyilvánvaló, mert ekkor a PK szakasz hosszban a legrövidebb, tehát a költsége minimális. Ez a feladat függvénytani álruhában a márciusi emelt szintű feladatsor 4. feladata volt (és például a 2009/2010-es tanévi Arany Dániel Matematikai Tanulóversenyen a kezdők I–II. kategória második fordulójában is szerepelt, a megoldásában a (6.2) egyenlőtlenség ugyancsak felbukkant, lásd a feladatsort és a megoldást a [13] weboldalon).

Próbáljunk meg a hómezős feladatnak a KöMaL áprilisi számában és e cikkben közölt megoldásai közül minél többet a fenti feladatra általánosítani. Ezek közül a differenciálszámítást használó okoskodás olvasható a [7] könyv 11.49. Példájában; a mechanikai érvelés a [9] könyv 9. fejezetében; a Ptolemaiosz-tételre épülő megoldás a [10] cikkben; a Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-egyenlőtlenséget alkalmazó pedig a [4] cikkben, ahol ezenfelül egy, a fény hullámtermészete által motivált, Huygenstől eredő geometriai megoldás is található. Izgalmas kalandozást kívánunk az ötletek rengetegében!

Köszönetnyilvánítás. A szerző köszönettel tartozik *Kovács Balázsnak* és *Gnädig Péternek* a kézirathoz fűzött értékes megjegyzéseikért.

Hivatkozások

[1] Besenyei Ádám, A Milne-egyenlőtlenség és társai, avagy ellenállások álruhában I–II., *KöMaL,* 2015/9, 514–524. és 2016/1, 2–10.,
http://abesenyei.web.elte.hu/publications/ellenallas.pdf.

[2] H. S. M. Coxeter, S. L. Greitzer, *Az újra felfedezett geometria,* Gondolat, Budapest, 1977.

[3] Gerőcs L., *A húrnégyszögek meghódítása,* Akadémiai Kiadó, Budapest, 2010.

[4] M. Golomb, Elementary Proofs for the Equivalence of Fermat's Principle and Snell's Law, *Amer. Math. Monthly,* Vol. 71, No. 5 (May, 1964), 541–543.,
http://www.jstor.org/stable/2312599.

[5] Hraskó András, Surányi László (szerk.), *Geometria, 9–10. évfolyam,* Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium, 2013.,
http://matkonyv.fazekas.hu/cache/pdf/vol_geometria_ii.pdf.

[6] Kubatov Antal, *Ptolemaios tétele, Casey-tétel, feladatok,*
http://matekold.fazekas.hu/portal/tanitasianyagok.

[7] Laczkovich Miklós, T. Sós Vera, *Valós Analízis I.,* TypoTEX, Budapest, 2012.

[8] M. Levi, *The Mathematical Mechanic: Using Physical Reasoning to Solve Problems,* Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 2009.

[9] Pólya György, *Indukció és analógia (A matematikai gondolkodás művészete 1.),* Gondolat, Budapest, 1988.

[10] D. Pedoe, A Geometric Proof of the Equivalence of Fermat's Principle and Snell's Law, *Amer. Math. Monthly,* Vol. 71, No. 5 (May, 1964), 543–544.,
http://www.jstor.org/stable/2312600.

[11] Reiman István, Geometriai feladatok megoldása a komplex számsíkon, 3. kiadás, Középiskolai Szakköri Füzetek, Tankönyvkiadó, Budapest, 1972.

[12] Reiman István, *Geometria és határterületei,* Szalay Könyvkiadó és Kereskedőház Kft., 1999.

[13] http://www.eszesen2010.hu.