

I. rész

1. Oldjuk meg az egyenleteket a valós számok halmazán:

a) $\sqrt{x+12} + \sqrt{x-12} = 6$;

b) $3^{\lg x^2} + 3^{1+\lg x} = 108$.

(12 pont)

Megoldás. a) Az egyenlet bal oldala $x \geq 12$ esetén értelmezett. Mindkét oldal nemnegatív, ezért a négyzetre emelés ekvivalens átalakítás lesz, és összevonás után a következőt adjuk:

$$2x + 2\sqrt{x^2 - 144} = 36.$$

2-vel osztva, x -et kivonva, majd négyzetre emelve az

$$x^2 - 144 = x^2 - 36x + 324$$

egyenletet kapjuk (ez csak $x \leq 18$ esetén ekvivalens átalakítás). Ezt 0-ra rendezve és megoldva $x = 13$ adódik eredményül, ami a kikötésnek megfelel, és az ekvivalens lépések miatt biztosan helyes gyök.

b) A hatványozás és a logaritmus azonosságait alkalmazva:

$$3^{2\lg x} + 3^{1+\lg x} = 108,$$

$$(3^{\lg x})^2 + 3 \cdot 3^{\lg x} = 108.$$

$3^{\lg x}$ -et új változónak tekintve másodfokú egyenletet kapunk, amelyből $3^{\lg x} = -12$ vagy $3^{\lg x} = 9$ adódik.

Az első eset nem lehetséges, a másodikból $\lg x = 2$, azaz $x = 100$, ami valóban gyöke az egyenletnek.

2. Az $\{1; 2; 3; 4; \dots; 400\}$ számhalmaz elemei közül kiválasztunk egyet véletlenszerűen. (Mindegyiket egyenlő eséllyel.) Mekkora a következő események valószínűsége:

a) A húzott szám osztható 3-mal, de nem osztható 4-gyel;

b) A húzott szám osztható 3-mal, 4-gyel vagy 5-tel;

c) A húzott szám számjegyeinek összege 5?

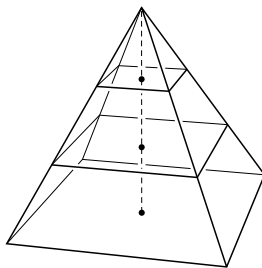
(14 pont)

Megoldás. a) 3-mal osztható 133 db szám, ezek közül 4-gyel is osztható 33 db szám (a 12 többszöröse), vagyis a kedvező esetek száma 100, a valószínűség $\frac{100}{400} = 0,25$.

b) 3-mal 133 db, 4-gyel 100 db, 5-tel 80 db, 12-vel 33 db, 15-tel 26 db, 20-szal 20 db, 60-nal 6 db szám osztható. A kedvező esetek száma: $133 + 100 + 80 - 33 - 26 - 20 + 6 = 240$, a valószínűség $\frac{240}{400} = 0,6$.

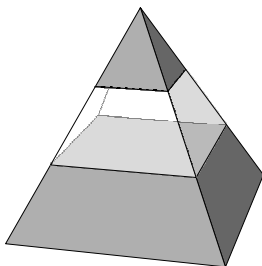
c) A megfelelő háromjegyű számok: 140, 104, 230, 203, 320, 302, 221, 212, 122, 113, 131, 311; kétjegyűek: 14, 41, 23, 32, 50, egyjegyű: 5. A kedvező esetek száma 18, a valószínűség $\frac{18}{400} = 0,045$.

3. a) Egy szabályos négyoldalú gúlát az alaplappal párhuzamos, a magasság harmadolópontjain átfektetett két síkkal három részre osztunk. A középső, csonkagúla alakú rész térfogata 28 m^3 . Számítsuk ki a teljes gúla térfogatát.



b) Az előbbi gúla egy köztéri alkotásnak szánt kisebb épület, alapéle 6 m. Felszínét a középső részen üveg borítja. Mekkora az üvegezett felület?

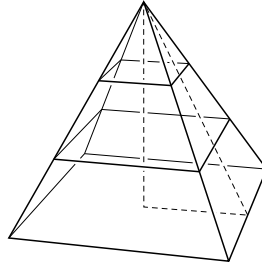
(14 pont)



Megoldás. a) A három gúla hasonló, hasonlóságuk aránya $1 : 2 : 3$, ebből térfogatuk aránya $1 : 8 : 27$, a középső csonkagúla térfogata $\frac{8}{27} - \frac{1}{27} = \frac{7}{27}$ része a gúla térfogatának, és ez 28 cm^3 . Ebből a gúla térfogata 108 cm^3 .

b) A gúla alaplappjának területe 36 m^2 . A gúla térfogatképletéből a magasságra 9 méter adódik.

Az ábrán szaggatott vonallal rajzolt derékszögű háromszögre a Pitagorasz-tételt felírva az oldallap magasságára $\sqrt{90}$ métert kapunk.



A párhuzamos szelők tétele alapján a csonkagúlat határoló trapéz magassága ennek harmadrésze, azaz $\sqrt{10}$ méter. A trapéz két alapja 2 m és 4 m, területe az előbbi adatokból $3\sqrt{10} \text{ m}^2$. Az üvegezett felület ennek 4-szerese, azaz

$$12\sqrt{10} \text{ m}^2 \approx 37,95 \text{ m}^2.$$

4. Egy hat elemű adathalmaz átlaga 10. Az első négy adat: 6, 11, 14, 8.

a) Mennyi a hiányzó két adat átlaga?

b) Adjuk meg a hiányzó két adatot, ha az adathalmaz szórása $\sqrt{7}$.

(12 pont)

Megoldás. a) A hat adat összege 60, tehát a két hiányzó adat összege 21, átlaguk 10,5.

b) Legyen a két adat x és y . Tudjuk, hogy $x + y = 21$. A szórás:

$$\sqrt{\frac{(6-10)^2 + (11-10)^2 + (14-10)^2 + (8-10)^2 + (x-10)^2 + (y-10)^2}{6}} = \sqrt{7}.$$

y helyébe $(21-x)$ -et írva:

$$\sqrt{\frac{16 + 1 + 16 + 4 + (x-10)^2 + (11-x)^2}{6}} = \sqrt{7}.$$

Négyzetre emelve és rendezve az $x^2 - 21x + 108 = 0$ egyenletre jutunk, melynek gyökei 12 és 9. Tehát $x = 12$, $y = 9$, vagy fordítva. A két hiányzó adat tehát 9 és 12.

II. rész

5. Egy társasjáték kelléke 80 darab kártyalap, amelyeken kék vagy piros színnel egy-egy írásjel látható. A jelek 30%-a kérdőjel, 45%-a felkiáltójel, a többi pont. A piros írásjeleknek $3/8$ része, a kéknek $1/6$ része pont.

a) Hány kék, illetve piros lap van a pakliban?

Ha a játék során tíz alkalommal húzok a pakliból (a húzott lapokat mindig visszatesszük, és újrakeverjük a kártyákat), mekkora a valószínűsége, hogy

b) egy kérdőjelet sem húzok;

c) 3-nál több kérdőjelet húzok?

d) Mennyi a húzott kérdőjelek számának várható értéke?

(16 pont)

Megoldás. a) 24 kérdőjel, 36 felkiáltójel, és így 20 pont van a jelek között. Ha a pirosak számát n -nel, a kékét $(80-n)$ -nel jelöljük, a pontok száma

$$\frac{3}{8}n + \frac{1}{6}(80-n) = 20.$$

Ezt megoldva azt kapjuk, hogy 32 piros és 48 kék lap van a pakliban.

b) Egy húzás alkalmával 0,3 valószínűséggel húzok kérdőjelet, 0,7 valószínűséggel mást. Annak valószínűsége, hogy a tíz húzásból egy sem kérdőjel $0,7^{10} \approx 0,028$.

c) Jelölje $p(n)$ annak valószínűségét, hogy a kérdőjelek száma n . Ekkor $p(0) = 0,028$; $p(1) = 10 \cdot 0,3 \cdot 0,7^9 \approx 0,121$; $p(2) = \binom{10}{2} \cdot 0,3^2 \cdot 0,7^8 \approx 0,233$; $p(3) = \binom{10}{3} \cdot 0,3^3 \cdot 0,7^7 \approx 0,267$.

Ezeket az értékeket összeadva annak valószínűsége, hogy legfeljebb 3 kérdőjelet húzunk 0,649. Annak valószínűsége, hogy ennél több kérdőjelet húzunk $1 - 0,649 = 0,351$.

d) Binomiális eloszlásról van szó, melynek paramétere 0,3, a kísérletek száma 10. A várható érték $n \cdot p = 10 \cdot 0,3 = 3$.

6. a) (a_n) és (b_n) pozitív tagú mértani sorozatok, hányadosuk 1,5, illetve 2. Állapítsuk meg az alábbi sorozatokról, hogy mértani sorozatok, illetve számtani sorozatok-e, és ha igen, adjuk meg a hányadost (q), illetve a differenciát (d).

	mértani	számtani	mindkettő	egyik sem	q	d
az a_n és b_n oldalú téglalap területe						
az a_n oldalú kocka átlója						
$\lg b_n$						
10^{b_n}						
$\frac{b_{n+5}}{b_n}$						

b) A fent említett (a_n) sorozat első tagja 0,2. Számítsuk ki az

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_{n+1}} + \frac{1}{a_{n+2}} + \frac{1}{a_{n+3}} + \dots$$

végteles sor összegének pontos értékét.

c) Egy nyolc tagú számtani sorozat páratlan indexű tagjainak összege 8,8, páros indexű tagjainak összege 10,4. Adjuk meg a nyolc tagot. (16 pont)

Megoldás. a)

	mértani	számtani	mindkettő	egyik sem	q	d
az a_n és b_n oldalú téglalap területe	X				3	
az a_n oldalú kocka átlója	X				1,5	
$\lg b_n$		X				$\lg 2$
10^{b_n}				X		
$\frac{b_{n+5}}{b_n}$			X		1	0

b) A sor első tagja 5, hányadosa 1,5-nek reciproka, azaz $\frac{2}{3}$. Az összeg:

$$\frac{5}{1 - \frac{2}{3}} = 15.$$

c) $a_1 + a_1 + 2d + a_1 + 4d + a_1 + 6d = 8,8$, ebből $4a_1 + 12d = 8,8$.

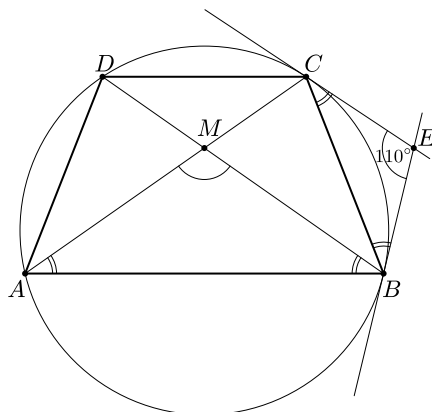
$a_1 + d + a_1 + 3d + a_1 + 5d + a_1 + 7d = 10,4$, ebből $4a_1 + 16d = 10,4$.

Az egyenletrendszer megoldása $d = 0,4$, $a_1 = 1$. A tagok: 1; 1,4; 1,8; 2,2; 2,6; 3; 3,4; 3,8.

7. a) $ABCD$ húrtrapéz, hosszabbik alapja az AB oldal. A trapéz köré írt körhöz érintőt húzunk a B és a C csúcsban, a metszéspontot E -vel jelölve $CEB \sphericalangle = 110^\circ$. Milyen szögben metszik egymást a trapéz átlói?

b) $ABCD$ húrtrapéz, hosszabbik alapja az AB oldal, $A(-8; 10)$, $B(12; 0)$. Tudjuk továbbá, hogy a D csúcs az y tengely pozitív félegyenesére illeszkedik, és az átlók merőlegesek egy-egy szárra. Határozzuk meg a C és a D csúcs koordinátáit. (16 pont)

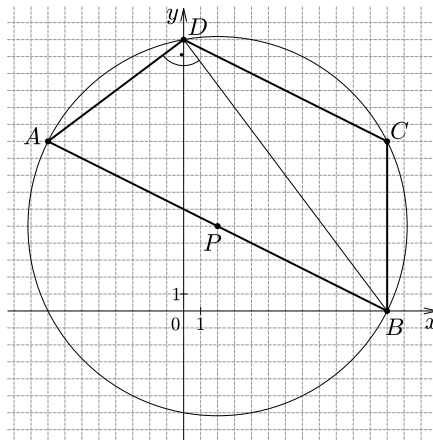
Megoldás. a) Legyen M az átlók metszéspontja. $ECB \sphericalangle$ és $EBC \sphericalangle$ a kör BC húrjához tartozó érintőszárú kerületi szögek, tehát egyenlők, és a nagyságuk 35° . $CAB \sphericalangle$ ugyanahhoz a húrhoz tartozó kerületi szög, ezért egyenlő az előbbiekkal, vagyis 35° . A szimmetria miatt a $DBA \sphericalangle$ is 35° . Az AMB háromszögben a harmadik szög 110° , tehát az átlók által közbezárt szög $180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$.



b) Mivel a D csúsból az AB alap derékszögben látszik, D rajta van az AB szakasz Thalész-körén. Ennek középpontja $P(2; 5)$, sugara Pitagorasz tételéből $\sqrt{125}$. A kör egyenlete

$$(x - 2)^2 + (y - 5)^2 = 125.$$

A D pont 1. koordinátája 0, ezt x helyébe írva és az egyenletet y -ra megoldva $y = 16$ és $y = -6$ adódik. A szöveg szerint csak $y = 16$ helyes, tehát $D(0; 16)$.



A DC szakasz párhuzamos az AB szakasszal, ezért irányvektoruk megegyezik. $\overrightarrow{AB}(20; -10)$, ezt 10-zel osztva egy egyszerűbb irányvektor $\mathbf{v}(2; -1)$. Ebből a DC egyenes normálvektora $\mathbf{n}(1; 2)$, ismert pontja $D(0; 16)$. Írjuk fel az egyenletét: $x + 2y = 32$.

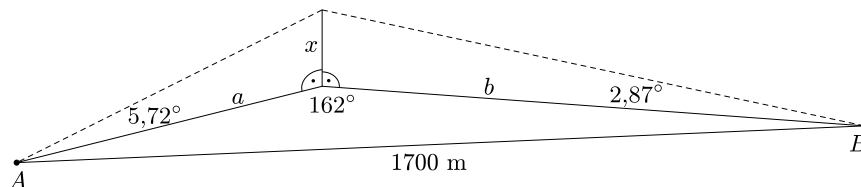
Oldjuk meg az egyenes és a kör egyenletéből álló egyenletrendszert. $x = 0$, $y = 16$, illetve $x = 12$, $y = 10$ a két megoldás, vagyis $C(12; 10)$.

8. a) Egy síkságon futó egyenes vasúti szakasz két állomásépületének távolsága 1,7 km. A vasútvonaltól távolabb álló toronyház teteje az egyik állomásról $5,72^\circ$ -os, a másiktól $2,87^\circ$ -os emelkedési szögben látszik. A torony tövéénél állva a két állomás közötti szakasz 162° -os szögben látható. Készítsünk ábrát. Adjuk meg a torony magasságát egész méterre kerekítve.

b) Egy háromszög két oldala 70 m és 110 m, a velük szemközti szögek különbsége 30° . Mekkora a háromszög szögei? (Az eredményeket egy tizedesjegy pontossággal adjuk meg.) (16 pont)

Megoldás. a) Az ábrán A és B az állomásokat jelöli. A torony magassága legyen x . A két derékszögű háromszögben a -t és b -t kifejezve

$$a = \frac{x}{\operatorname{tg} 5,72^\circ} = \frac{x}{0,1} \quad \text{és} \quad b = \frac{x}{\operatorname{tg} 2,87^\circ} = \frac{x}{0,05}.$$



A torony töve és az állomások által meghatározott háromszögre írjuk fel a koszinusztételt:

$$1700^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos 162^\circ.$$

a és b helyébe a fenti kifejezéseket behelyettesítve olyan egyenletet kapunk, amelynek a változója az x . Ezt megoldva az eredmény $x = 57,29$ m. A torony magassága méterre kerekítve 57 m.

b) A 70 m-es oldallal szemközti szög legyen α , a 110 m-es oldallal szemközti szög $\alpha + 30^\circ$. (A nagyobb oldallal szemben van a nagyobb szög.) A szinusztétel szerint

$$\frac{\sin(\alpha + 30^\circ)}{\sin \alpha} = \frac{11}{7}.$$

Szorozzuk be $\sin \alpha$ -val, a baloldalon alkalmazzunk addíciós tételt, a tört, illetve gyök alakban adott értékeket írjuk át tizedestörtbe:

$$\begin{aligned} 0,866 \sin \alpha + 0,5 \cos \alpha &= 1,5714 \sin \alpha, \\ 0,5 \cos \alpha &= 0,7054 \sin \alpha. \end{aligned}$$

Osszuk az egyenlet két oldalát $\cos \alpha$ -val (ami nem 0, mert $\alpha = 90^\circ$ -ra nem igaz az egyenlet):

$$0,70887 = \operatorname{tg} \alpha.$$

Ebből $\alpha = 35,3^\circ$, $\alpha + 30^\circ = 65,3^\circ$, a harmadik szög $79,4^\circ$.

9. a) Adjuk meg az f harmadfokú függvényt, ha egyik zérushelye az 1, deriváltja az $f'(x) = 3x^2 - 12x + 11$ függvény.
b) Jelölje p a $g(x) = \sin \frac{x}{3}$ függvény legkisebb pozitív zérushelyét. Számítsuk ki a $[0; p]$ intervallumon a g függvény grafikonja és az x tengely közé eső zárt területet.

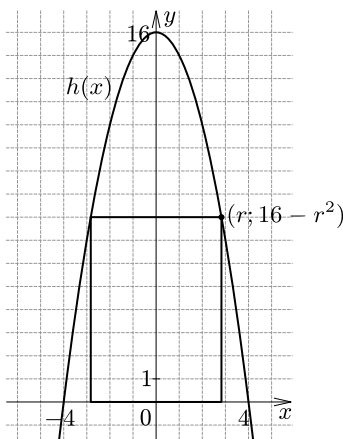
c) A $h(x) = -x^2 + 16$ függvény grafikonja és az x tengely által határolt síkidomot megforgatjuk az y tengely körül. Mekkora az így kapott forgástestbe írható maximális térfogatú henger térfogata? (16 pont)

Megoldás. a) $f(x)$ az $f'(x)$ primitívfüggvénye, tehát $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x + c$. Tudjuk, hogy $f(1) = 0$, tehát $0 = 1 - 6 + 11 + c$, amiből $c = -6$. A függvény hozzárendelési szabálya $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$.

b) $\sin \frac{x}{3} = 0$ akkor és csak akkor, ha $\frac{x}{3} = k\pi$, vagyis $x = 3k\pi$ (k egész). A legkisebb pozitív zérushely tehát a 3π . A $[0; 3\pi]$ intervallumon a függvény értékei pozitívak, ezért az x -tengellyel bezárt terület

$$\int_0^{3\pi} \sin \frac{x}{3} = \left[-3 \cos \frac{x}{3} \right]_0^{3\pi} = 3 - (-3) = 6.$$

c) A forgástestnek és a beírt hengernek a koordinátasíkra eső keresztmetszetét mutatja az *ábra*.



A henger alapkörének sugara r , magassága $16 - r^2$. Ebből a térfogata

$$V = r^2(16 - r^2)\pi.$$

Ez akkor maximális, ha

$$f(r) = r^2(16 - r^2) = 16r^2 - r^4$$

maximális, ahol $0 < r < 4$.

A függvény deriváltja

$$f'(r) = 32r - 4r^3 = 4r(8 - r^2).$$

A vizsgált tartományban a derivált értéke 0, ha $r = \sqrt{8}$, pozitív, ha $r < \sqrt{8}$ és negatív, ha $r > \sqrt{8}$.

A $]0; 4[$ intervallumon tehát az $f(r)$ függvénynek a $\sqrt{8}$ -ban maximuma van.

A henger maximális térfogata így $V = 8 \cdot (16 - 8) = 64$.