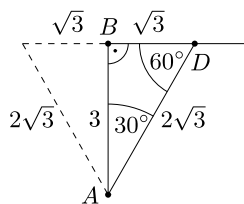


4. A gyalogosok és Huygens

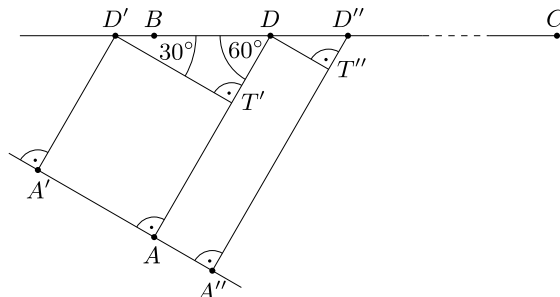
Térjünk most vissza a 2. szakasz eredményének elemzésére, ezáltal az időben legrövidebb út egy figyelemre méltó tulajdonságát fogjuk felfedni.

Fél szabályos háromszögek. Tanulmányozzuk először azt, hogy geometriailag milyen speciális helyzetű az időben legrövidebb út, amelyben a D pontnak $\sqrt{3}$ km távolságra kell lennie B -től. A Pitagorasz-tétel szerint ekkor $AD = 2\sqrt{3} = 2BD$, így az ADB háromszög éppen egy szabályos háromszög fele, vagyis $\angle ADB = 60^\circ$, $\angle BAD = 30^\circ$ (lásd a 3. ábrát). A gyalogosnak tehát az AB -vel 30° -os szöget bezáró AD szakaszon kell haladnia a BC országút felé.



3. ábra

Gyalogosok frontja. Tüzetesebben szemügyre véve az imént kirajzolódott speciális szögeket, egy különös összefüggést fedezhetünk fel. Képzeljünk el, hogy egyszerre többen szeretnének a hómezőről a leghamarabb eljutni a C pontba, mégpedig a következőképpen. Az AD szakaszra az A pontban merőleges egyenesen az A (piciny) környezetében egymás mellé felsorakoztatjuk a gyalogosokat, akik ugyanabban az időpontban indulnak el az AD szakasszal párhuzamosan v sebességgel az országút felé (a 4. ábrán az A' és A'' pontokból induló gyalogosok pályája látható). Az országút elérésekor a gyalogosok $2v$ sebességgel a C pont felé haladnak tovább (egymás mellett, ha esetleg találkoznak). Azt állítjuk, hogy ekkor az összes gyalogos egyszerre érkezik a C pontba (pontosabban, az országútra C -ben merőleges egyenesre).



4. ábra

Vizsgáljuk például az A és A' pontból induló két gyalogost. A derékszögek miatt $AT'D'A'$ téglalap, ezért $AT' = A'D'$, így mikor az A' pontból induló gyalogos D' -be ér, az A -ból induló a T' pontba jut. Másrészt a $DD'T'$ háromszög egy szabályos háromszög fele, így $D'D = 2T'D$, emiatt a D' -ből $2v$ sebességgel továbbhaladó gyalogos ugyanakkor ér D -be, mint amikor a T' -ből v sebességgel D felé haladó másik gyalogos. Az A és A' pontból induló két gyalogos tehát egyszerre ér D -be, és innen már együtt, egymás mellett mennek tovább C felé. Hasonlóan látható, hogy az A és A'' pontokból induló gyalogosok D'' -be egyszerre érnek, és mennek innen tovább.

Fizikai nyelven az A -ból induló gyalogosra tekinthetünk úgy, mint a fényre, amelyről most a *Pierre de Fermat* (1601–1665) francia jogász és „műkedvelő” matematikustól származó elv szerint azt feltételezzük, hogy a legrövidebb idő alatt jut el a C pontba. Mint tudjuk, a fény hullámként is viselkedik, ezért egyetlen gyalogos helyett egy egész sereg gyalogusból álló, a haladás irányára merőleges front terjedésére gondolhatunk, amelyben minden gyalogos ugyanakkor érkezik a C pontba. E fizikai szemléletből kiindulva a 4. ábra segítségével visszafelé okoskodva könnyedén megkapjuk, hogy a gyalogosok pályájának az országúttal 60° -os szöget kell bezárnia. Mindez természetesen nem teljes értékű megoldás, de legalábbis a végeredménynek egy igen érzékletes megsejtése.

4.1. történeti megjegyzés. Az előbbi gondolatmenet általánosítása valójában már több évszázaddal ezelőtt megfogalmazódott a holland matematikus, fizikus és csillagász, *Christiaan Huygens* (1629–1695) fejében, aki egyébként különféle órák tervezésében is élen járt (az életéről a [2] könyvben olvashatunk). Az 1690-ben megjelent *Traité de la lumière* (Értekezés a fényről) című munkájában adta közre a fény hullámtérképéről szóló elméletét, és – a 4. ábrához hasonló rajzon – megmutatta (lásd [4, 33. oldal]), hogy mindebből levezethető a fénytörés *Willebrord van Roijen Snellius* (1580–1626) holland csillagász és matematikus, valamint *René Descartes* (1596–1650) francia filozófus és természettudós által korábban már megfogalmazott törvénye, amely szerint a beesési szög szinuszának és a törési szög szinuszának hányadosa egyenlő az egyes közegekben mért terjedési sebességek hányadosával.

5. Megoldások potyognak az égből

Mielőtt a következő nevezetes egyenlőtlenségre térnénk rá, ebben a részben két további megoldást mutatunk, amelyekben felhasználjuk, hogy már megsejtettük a minimumhelyet. Az ilyesmi nem ritka a matematikában: egy fizikai érvelés vagy egy mélyebb elmélet (például differenciálszámítás) segít megsejteni a végeredményt, majd ezáltal lelünk más megoldási utakra.

Egy kis trigonometria. Az időben legrövidebb út igen speciális helyzete arra ösztönözhet, hogy megnézzük, miként fest a teljes út megtételéhez szükséges idő, ha azt például $\alpha = \angle BAD$ függvényében írjuk fel (lásd 5. ábra). Ekkor a BAD háromszögben $\cos \alpha = AB/AD$ és $\operatorname{tg} \alpha = BD/AB$, így

$$(5.1) \quad \frac{AD}{v} + \frac{DC}{2v} = \frac{AD}{v} + \frac{BC - BD}{2v} = \frac{AB}{2v} \left(\frac{2}{\cos \alpha} - \operatorname{tg} \alpha \right) + \frac{BC}{2v},$$

ahol $AB = 3$ és $BC = 10$ adottak. A jobb oldalon a zárójelben lévő kifejezés minimumának megkeresése most sem tűnik magától értetődőnek, ám egyéb ötlet híján a differenciálszámítás elsőpró ereje bizonyára megteszi a dolgát. Ha viszont valahonnan – például az előző megoldásokból – már megsejtettük az $\alpha = 30^\circ$ minimumhelyet, akkor elegendő a

$$\frac{2}{\cos \alpha} - \operatorname{tg} \alpha \geq \frac{2}{\cos 30^\circ} - \operatorname{tg} 30^\circ = \sqrt{3}$$

egyenlőtlenséget igazolni $0 \leq \alpha \leq \angle BAC$ esetén, ami $\cos \alpha > 0$ miatt egyenértékű azzal, hogy

$$1 \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha + \frac{1}{2} \sin \alpha.$$

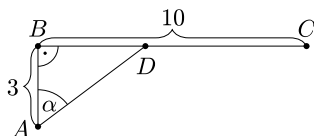
Mivel $\cos 30^\circ = \sqrt{3}/2$ és $\sin 30^\circ = 1/2$, ezért az iménti egyenlőtlenség a

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

addíciós formula felhasználásával az

$$1 \geq \cos(\alpha - 30^\circ)$$

nyilvánvaló alakot ölti, amelyről az egyenlőség feltétele, $\alpha = 30^\circ$ is azonnal leolvasható. Ez megfelel a feladat kívánalmainak, hiszen ekkor $AB = 3$ és $BC = 10$ miatt $BD = \sqrt{3} < BC = 10$. Mindez a szélsőérték-feladatunknak egy újabb, trigonometrikus megoldási módja.



5. ábra

Vegyük észre, hogy az előbbi érvelésnek valójában az is folyománya, hogy az (5.1) kifejezés minimumhelye a $0 \leq \alpha \leq \angle BAC$ szögtartományon $\alpha = 30^\circ$ minden olyan esetben, amikor $\angle BAC \geq 30^\circ$ (az AB és BC szakaszok konkrét hosszától függetlenül). Természetesen mindez a 2. szakaszbeli érvelésből szintén következik, ugyanis az egységek átskálázásával feltehető, hogy $AB = 3$, így az (1.2) képlet csupán annyiban módosul, hogy

$$\frac{AD}{v} + \frac{DC}{2v} = \frac{1}{v} \left(\sqrt{x^2 + 9} + \frac{BC - x}{2} \right) = \frac{1}{v} f(x) + \frac{BC - 10}{2v},$$

ahol $0 \leq x \leq BC$. Szórol szóra megismételve a korábbi okoskodást a minimumhelyre $x = \sqrt{3}$ adódik, feltéve, hogy $BC \geq \sqrt{3}$.

Felmerül a kérdés, hogy vajon $BC < \sqrt{3}$ esetén a BC szakasz mely pontja szolgáltatja az időben legrövidebb utat? Ebben az esetben $BD = \sqrt{3}$ már nem jöhet szóba, hiszen D a BC szakaszon kívülre esne. Ekkor például az f függvény monotonitási tulajdonságai lehetnek segítségünkre.

Monotonitás elemien. Valamely ismert matematikai program segítségével kirajzolva az f függvény grafikonját (6. ábra) rögtön megsejthetjük, hogy a minimumhelytől balra f szigorúan monoton csökkenő, jobbra pedig szigorúan monoton növekvő. (Vigyázzunk, hogy egy függvény egy minimumhelytől balra és jobbra is végtelen sokszor fel-le ingadozhat – oszcillálhat –, tehát általában nem feltétlenül kell monotonnak lennie!) Ebből következően, ha $BC < \sqrt{3}$, akkor az időben legrövidebb út maga a BC szakasz. A monotonitási tulajdonságokat differenciálszámítás segítségével természetesen könnyedén igazolhatjuk (az áprilisi KöMaL negyedik megoldásának mintájára), de elemien sem nehéz belátni, nézzük is meg. Legyen például $x_1 < x_2 \leq \sqrt{3}$, ekkor $f(x_1) > f(x_2)$ azt jelenti, hogy

$$\sqrt{x_1^2 + 9} + \frac{10 - x_1}{2} > \sqrt{x_2^2 + 9} + \frac{10 - x_2}{2},$$

átrendezve pedig

$$x_2 - x_1 > 2 \left(\sqrt{x_2^2 + 9} - \sqrt{x_1^2 + 9} \right).$$

Mindkét oldalt a pozitív $\sqrt{x_2^2 + 9} + \sqrt{x_1^2 + 9}$ kifejezéssel szorozva, valamint az $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$ azonosságot felhasználva

$$(x_2 - x_1) \left(\sqrt{x_2^2 + 9} + \sqrt{x_1^2 + 9} \right) > 2 \left((x_2^2 + 9) - (x_1^2 + 9) \right)$$

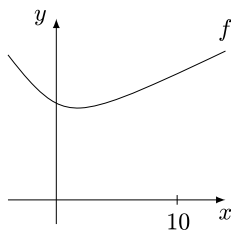
adódik, ahol a jobb oldal $2(x_2 - x_1)(x_2 + x_1)$ szorzat alakba írható át. Mivel $x_2 > x_1$, így az $(x_2 - x_1)$ pozitív tényezővel való ekvivalens leosztás után a

$$\sqrt{x_2^2 + 9} + \sqrt{x_1^2 + 9} > 2(x_2 + x_1),$$

a bizonyítandó $f(x_1) > f(x_2)$ összefüggéssel egyenértékű egyenlőtlenséghez jutunk. Ez viszont $x_2 \leq \sqrt{3}$ és $x_1 < \sqrt{3}$ miatt teljesül, hiszen ekkor

$$\sqrt{x_2^2 + 9} + \sqrt{x_1^2 + 9} > 2\sqrt{12} = 2(\sqrt{3} + \sqrt{3}) > 2(x_2 + x_1).$$

Ezzel differenciálszámítás nélkül beláttuk f szigorú monoton csökkenését $x \leq \sqrt{3}$ esetén; az $x \geq \sqrt{3}$ esetén való szigorú növekedés hasonlóan igazolható (és a fentiek mintájára érdemes megpróbálkozni az (5.1) függvény monotonitási szakaszainak vizsgálatával). Ez a hőmezős feladatnak ismét egy megoldása.



6. ábra

6. Cauchy, Bunyakovszkij és Schwarz

Ebben a részben az (1.3) hozzárendeléssel értelmezett f függvényben szereplő négyzetgyök kiküszöbölésének egy újabb módját mutatjuk be, amelynek ötlete a [3] cikkből származik. Fő eszközünk a következő csinos algebrai egyenlőtlenség.

6.1. állítás (Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-egyenlőtlenség). *Tetszőleges a, b, c, d valós számokra*

$$(6.1) \quad |ac + bd| \leq \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{c^2 + d^2}.$$

Egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $ad = bc$.

6.2. megjegyzés. Bármely x valós számra $x \leq |x|$ (és egyenlőség csakis $x \geq 0$ esetén van), ezért a (6.1) egyenlőtlenség igaz marad a bal oldalon szereplő abszolút érték elhagyásával. Ekkor az egyenlőség feltétele szigorúbb, $ad = bc$ mellett $ac + bd \geq 0$ is szükséges (amit sokkal elegánsabban meg lehet fogalmazni, erről nemsokára szót ejtünk a bizonyítást követő 6.5. észrevételben).

Bizonyítás. Az egyenlőtlenség mindkét oldala nemnegatív, ezért a négyzetre emelés ekvivalens átalakítás, elég tehát igazolni, hogy

$$(ac + bd)^2 \leq (a^2 + b^2)(c^2 + d^2).$$

Innen a műveletek elvégzése után

$$a^2c^2 + 2acbd + b^2d^2 \leq a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2$$

adódik, ami rendezve a

$$0 \leq a^2d^2 - 2acbd + b^2c^2$$

alakot ölti, azaz

$$0 \leq (ad - bc)^2.$$

Ez nyilvánvalóan teljesül, az egyenlőség feltétele, $ad = bc$ pedig világosan leolvasható. Mivel ekvivalens átalakításokat végeztünk, sőt minden lépésben az egyenlőség esete megőrződött, ezért az eredeti egyenlőtlenség is igaz és abban ugyanakkor áll fenn egyenlőség. \square

6.3. megjegyzés. Az egyenlőtlenség egy másik hagyományos bizonyítása, hogy felírjuk a nemnegatív és $a^2 + b^2 \neq 0$ esetén másodfokú

$$(ax - c)^2 + (bx - d)^2 = (a^2 + b^2)x^2 - 2(ac + bd)x + c^2 + d^2$$

kifejezés diszkriminánsát, amely szükségképpen nem pozitív. Ezt az Olvasóra bízunk, az egyenlőség esetének vizsgálatával együtt.

6.4. történeti megjegyzés. A (6.1) egyenlőtlenség (abszolút érték nélküli változatának) valós szám n -esekre vonatkozó általánosítása a következő:

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2}.$$

Ezt *Augustin-Louis Cauchy* (1789–1857) francia matematikus – a 6.3. megjegyzésben vázolt ötletet követve – igazolta 1821-ben a híres École Polytechnique műszaki egyetemen tartott analízis kurzusához írt könyvében. A mű a modern analízis kialakulásának fontos mérföldköve, amelyben Cauchy számos mai fogalom, köztük például a határérték, folytonosság alapjait fektette le (Cauchy összegyűjtött munkái 27 kötetet tesznek ki, amelyek a [7] weboldalon elektronikus formában megtalálhatók több más hasonlóan kiemelkedő matematikus összes műveivel együtt). Később, 1859-ben *Viktor Jakovlevics Bunyakovszkij* (1804–1889) orosz matematikus az egyenlőtlenségnek integrálható függvényekre vonatkozó változatát írta fel:

$$\left(\int_a^b g(x)h(x) dx \right)^2 \leq \int_a^b g^2(x) dx \cdot \int_a^b h^2(x) dx.$$

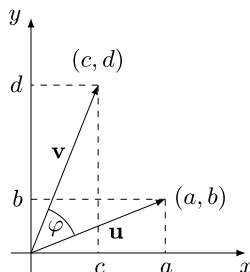
Bunyakovszkij cikke kevésbé vált ismertté az akkori Nyugat-Európában, így nem tudván az eredményről *Karl Hermann Amandus Schwarz* (1843–1921) német matematikus 1885-ben hasonló egyenlőtlenséget igazolt felszíni integrálokkal kapcsolatos munkájában. Ezek alapján szokás a (6.1) egyenlőtlenséget és általánosításait Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-egyenlőtlenség néven emlegetni – ám nyelvterületenként és matematikai iskolánként is roppant változatos, hogy a három névből álló halmaz nemüres részhalmazai közül melyikkel illetik az egyenlőtlenséget (a nevek sorrendjéről nem is beszélve).

A hómezős feladatra való alkalmazás előtt célszerű még egy észrevételt tennünk az egyenlőtlenség szemléletes jelentéséről. Akiket a megoldás jobban izgat, azok első olvasáskor továbbbugorhatnak.

6.5. észrevétel. A ránézésre algebrainak tűnő (6.1) egyenlőtlenségnek valójában geometriai jelentés tulajdonítható. Vegyük észre ugyanis (lásd 7. ábra), hogy $\sqrt{a^2 + b^2}$, $\sqrt{c^2 + d^2}$ rendre az $\mathbf{u} = (a, b)$ és $\mathbf{v} = (c, d)$ síkbeli vektorok hossza (abszolút értéke), az $ac + bd$ kifejezés pedig a két vektor skaláris szorzata derékszögű koordinátarendszerbeli koordináták segítségével felírva (vektorok skaláris szorzatáról és geometriai alkalmazásairól bővebben lásd *Reiman István* (1927–2012) – a magyar matematikai tehetség gondozás legendás alakja, a diákolimpiai szakkör évtizedeken keresztül vezetője – kitűnő [5] könyvét). Ismert, hogy két vektor skaláris szorzata a hosszai és a hajlásszögük koszinuszának szorzata. Ha most (\mathbf{u}, \mathbf{v}) jelöli \mathbf{u} és \mathbf{v} skaláris szorzatát, akkor a (6.1) egyenlőtlenség így írható:

$$|(\mathbf{u}, \mathbf{v})| = |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}| \cdot |\cos \varphi| \leq |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|.$$

(Vigyázzunk, itt kétféle abszolút érték is szerepel, számoké és vektoroké egyaránt.) Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $|\cos \varphi| = 1$, vagyis az \mathbf{u} , \mathbf{v} vektorok egyállásúak – ellenőrizzük le, hogy ez egyenértékű a korábban kapott $ad = bc$ feltétellel. Az is világosan látszik, hogy a bal oldali abszolút érték nélküli $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|$ egyenlőség feltétele $\cos \varphi = 1$, tehát \mathbf{u} és \mathbf{v} azonos irányúak. Ebben a formában sokkal szemléletesebb (és könnyebben megjegyezhető) a (6.1) egyenlőtlenség, vigyázzunk azonban, hogy bár a bizonyítás ránézésre pofon egyszerű, de el van benne rejtve a skaláris szorzat koordinátákkal felírt alakja.



7. ábra

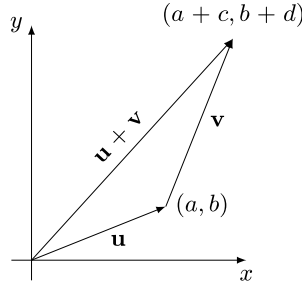
Figyelemre méltó még az előbbieken kívül, hogy a (6.1) egyenlőtlenségnek következménye a síkvektorokra vonatkozó háromszög-egyenlőtlenség:

$$|\mathbf{u} + \mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|.$$

Ez persze geometriailag világos, hiszen az \mathbf{u} , \mathbf{v} , $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ vektorok alkotta háromszög bármely két oldalhosszának összege legalább akkora, mint a harmadik oldal hossza (lásd 8. ábra). A néha becsapós szemléletet viszont könnyedén kikerülhetjük, ugyanis koordinátákkal kifejezve arról van szó, hogy

$$(6.2) \quad \sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2},$$

ami – négyzetre emeléssel és rendezéssel láthatóan – a (6.1) egyenlőtlenség abszolút érték nélküli változatával ekvivalens.



8. ábra

A hómezős feladat megoldása. Kanyarodjunk most vissza az (1.3) függvény minimumának megkereséséhez. A $\sqrt{x^2 + 9}$ kifejezés éppen az $(x, 3)$ vektor hossza, ami azt sugallhatja számunkra, hogy a Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-egyenlőtlenséggel próbálkozzunk. Az alkalmazásához azonban szükségünk lenne még egy vektorra, ám szerencsére ott van, csak „elrejtőzött”:

$$(6.3) \quad \sqrt{x^2 + 9} = \sqrt{x^2 + 9} \cdot 1 = \sqrt{x^2 + 9} \cdot \sqrt{\cos^2 \beta + \sin^2 \beta}.$$

(Amennyiben nem szeretnénk trigonometrikus függvényekkel dolgozni, akkor $(\cos \beta, \sin \beta)$ helyett gondoljunk egyszerűen egy (v_1, v_2) egység hosszú vektorra, azaz $v_1^2 + v_2^2 = 1$.) A β szög számunkra megfelelő értékét egyelőre nem tudjuk, de tüstént ki fog derülni. Alkalmazzuk most a Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-egyenlőtlenség abszolút érték nélküli változatát (6.3) alapján:

$$(6.4) \quad \sqrt{x^2 + 9} = \sqrt{x^2 + 9} \cdot \sqrt{\cos^2 \beta + \sin^2 \beta} \geq x \cos \beta + 3 \sin \beta.$$

Ezzel az f függvény egy alsó becslését nyerjük:

$$f(x) \geq x \cos \beta + 3 \sin \beta + \frac{10 - x}{2} = x \left(\cos \beta - \frac{1}{2} \right) + 3 \sin \beta + 5.$$

Immár jól látszik, hogy $\cos \beta = 1/2$ esetén f -nek x -től független alsó becslése adódik. Legyen tehát $\beta = 60^\circ$, ekkor $\cos \beta = 1/2$, $\sin \beta = \sqrt{3}/2$ miatt

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 9} + \frac{10 - x}{2} \geq 3 \sin \beta + 5 = \frac{3\sqrt{3}}{2} + 5.$$

A 6.2. megjegyzés figyelembevételével egyenlőség csakis akkor áll fenn, ha $x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3 \cdot \frac{1}{2}$, azaz $x = \sqrt{3}$ (a 6.5. észrevételben foglaltak szerint úgy is fogalmazhatunk, hogy az $(x, 3)$ és $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ vektoroknak azonos állásúaknak kell lenniük). Mivel $0 < \sqrt{3} < 10$, ezzel a korábbi megoldásokhoz hasonlóan megkaptuk, hogy az f függvény minimumhelye a $[0, 10]$ intervallumon $x = \sqrt{3}$.

6.6. megjegyzés. A kíváncsi Olvasó eltöprenghet azon, hogy az előbbi okoskodásban felbukkanó β szög és maga a (6.4) egyenlőtlenség az 1. ábrán vajon hogyan jeleníthető meg – ehhez érdemes használni azt, hogy egy vektornak egy adott egységvektorral képzett skaláris szorzata a vektornak az egységvektor irányára vetett előjeles vetülete (lásd [5]).

Az [1] könyvecskében a Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-egyenlőtlenség mellett további nevezetes egyenlőtlenségekhez kapcsolódó feladatok közül válogathatunk, ezenkívül a [6] angol nyelvű könyv igazi csemege azok számára, akik az egyenlőtlenségek művészetében szeretnének kalandozni.

- [1] Ábrahám Gábor, *Nevezetes egyenlőtlenségek*, Mozaik Oktatási Stúdió, Szeged, 1995.
- [2] Sz. G. Gingyikin, *Történetek fizikusokról és matematikusokról*, Harmadik kiadás, Typotex, Budapest, 2012.
- [3] M. Golomb, Elementary Proofs for the Equivalence of Fermat's Principle and Snell's Law, *Amer. Math. Monthly*, Vol. 71, No. 5 (May, 1964), 541–543.,
<http://www.jstor.org/stable/2312599>.
- [4] Ch. Huygens, *Traité de la lumière*, Chez Pierre van der Aa, Leiden, 1690.,
<https://archive.org/stream/traitdelalvmie00huyg>
- [5] Reiman István, *Geometria és határterületei*, Szalay Könyvkiadó és Kereskedőház Kft., 1999.
- [6] J. M. Steele, *The Cauchy–Schwarz Master Class (An Introduction to the Art of Mathematical Inequalities)*, Cambridge Univ. Press, NY, 2004.
- [7] Gallica-Math, <http://sites.mathdoc.fr/OEUVRES>.