

I. rész

1. Oldjuk meg az egyenleteket a valós számok halmazán:

a) $\sqrt{x+12} + \sqrt{x-12} = 6$;

b) $3^{\lg x^2} + 3^{1+\lg x} = 108$.

(12 pont)

2. Az $\{1; 2; 3; 4; \dots; 400\}$ számhalmaz elemei közül kiválasztunk egyet véletlenszerűen. (Mindegyiket egyenlő eséllyel.) Mekkora a következő események valószínűsége:

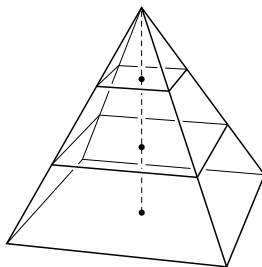
a) A húzott szám osztható 3-mal, de nem osztható 4-gyel;

b) A húzott szám osztható 3-mal, 4-gyel vagy 5-tel;

c) A húzott szám számjegyeinek összege 5?

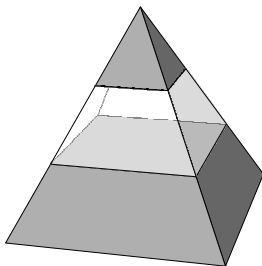
(14 pont)

3. a) Egy szabályos négyoldalú gúlát az alaplappal párhuzamos, a magasság harmadolópontjain átfektetett két síkkal három részre osztunk. A középső, csonkagúla alakú rész térfogata 28 m^3 . Számítsuk ki a teljes gúla térfogatát.



b) Az előbbi gúla egy köztéri alkotásnak szánt kisebb épület, alapéle 6 m. Felszínét a középső részen üveg borítja. Mekkora az üvegezett felület?

(14 pont)



4. Egy hat elemű adathalmaz átlaga 10. Az első négy adat: 6, 11, 14, 8.

a) Mennyi a hiányzó két adat átlaga?

b) Adjuk meg a hiányzó két adatot, ha az adathalmaz szórása $\sqrt{7}$.

(12 pont)

II. rész

5. Egy társasjáték kelléke 80 darab kártyalap, amelyeken kék vagy piros színnel egy-egy írásjel látható. A jelek 30%-a kérdőjel, 45%-a felkiáltójel, a többi pont. A piros írásjeleknek $3/8$ része, a kéknek $1/6$ része pont.

a) Hány kék, illetve piros lap van a pakliban?

Ha a játék során tíz alkalommal húzok a pakliból (a húzott lapokat mindig visszatesszük, és újakeverjük a kártyákat), mekkora a valószínűsége, hogy

b) egy kérdőjelet sem húzok;

c) 3-nál több kérdőjelet húzok?

d) Mennyi a húzott kérdőjelek számának várható értéke?

(16 pont)

6. a) (a_n) és (b_n) pozitív tagú mértani sorozatok, hányadosuk 1,5, illetve 2. Állapítsuk meg az alábbi sorozatokról, hogy mértani sorozatok, illetve számtani sorozatok-e, és ha igen, adjuk meg a hányadost (q), illetve a differenciát (d).

	mértani	számtani	mindkettő	egyik sem	q	d
az a_n és b_n oldalú téglalap területe						
az a_n oldalú kocka átlója						
$\lg b_n$						
10^{b_n}						
$\frac{b_{n+5}}{b_n}$						

b) A fent említett (a_n) sorozat első tagja 0,2. Számítsuk ki az

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_{n+1}} + \frac{1}{a_{n+2}} + \frac{1}{a_{n+3}} + \dots$$

végtesen sor összegének pontos értékét.

c) Egy nyolc tagú számtani sorozat páratlan indexű tagjainak összege 8,8, páros indexű tagjainak összege 10,4. Adjuk meg a nyolc tagot. (16 pont)

7. a) $ABCD$ húrtrapéz, hosszabbik alapja az AB oldal. A trapéz köré írt körhöz érintőt húzunk a B és a C csúcsban, a metszéspontot E -vel jelölve $CEB \angle = 110^\circ$. Milyen szögben metszik egymást a trapéz átlói?

b) $ABCD$ húrtrapéz, hosszabbik alapja az AB oldal, $A(-8; 10)$, $B(12; 0)$. Tudjuk továbbá, hogy a D csúcs az y tengely pozitív félegyenesére illeszkedik, és az átlók merőlegesek egy-egy szára. Határozzuk meg a C és a D csúcs koordinátáit. (16 pont)

8. a) Egy síkságon futó egyenes vasúti szakasz két állomásépületének távolsága 1,7 km. A vasútvonaltól távolabb álló toronyház teteje az egyik állomásról $5,72^\circ$ -os, a másiktól $2,87^\circ$ -os emelkedési szögben látszik. A torony tövéénél állva a két állomás közötti szakasz 162° -os szögben látható. Készítsünk ábrát. Adjuk meg a torony magasságát egész méterre kerekítve.

b) Egy háromszög két oldala 70 m és 110 m, a velük szemközti szögek különbsége 30° . Mekkora a háromszög szögei? (Az eredményeket egy tizedesjegy pontossággal adjuk meg.) (16 pont)

9. a) Adjuk meg az f harmadfokú függvényt, ha egyik zérushelye az 1, deriváltja az $f'(x) = 3x^2 - 12x + 11$ függvény.

b) Jelölje p a $g(x) = \sin \frac{x}{3}$ függvény legkisebb pozitív zérushelyét. Számítsuk ki a $[0; p]$ intervallumon a g függvény grafikonja és az x tengely közé eső zárt területet.

c) A $h(x) = -x^2 + 16$ függvény grafikonja és az x tengely által határolt síkidomot megforgatjuk az y tengely körül. Mekkora az így kapott forgástestbe írható maximális térfogatú henger térfogata? (16 pont)