

I. rész

1. a) Bizonyítsuk be, hogy az alábbi kifejezés értéke x -től független:

$$\begin{aligned} & \sin^2 x (\sin^4 x + \sin^2 x + 2) + \cos^2 x (\cos^4 x + \cos^2 x + 2) + \\ & + \frac{\sin^2 2x}{4} \cdot (3 \sin^2 x + 3 \cos^2 x + 2). \end{aligned}$$

b) Számológép nélkül adjuk meg a következő kifejezés pontos értékét:

$$(1 + \operatorname{tg} 137^\circ)(1 + \operatorname{tg} 136^\circ)(1 + \operatorname{tg} 135^\circ)(1 + \operatorname{tg} 134^\circ). \quad (12 \text{ pont})$$

Megoldás. a) A zárójeleket felbontva, majd a kifejezést alakítva:

$$\begin{aligned} & \sin^6 x + \sin^4 x + 2 \sin^2 x + \cos^6 x + \cos^4 x + 2 \cos^2 x + \\ & + 3 \sin^4 x \cos^2 x + 3 \sin^2 x \cos^4 x + 2 \sin^2 x \cos^2 x = \\ & = (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 + (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 + 2(\sin^2 x + \cos^2 x) = 1 + 1 + 2 = 4. \end{aligned}$$

Az eredeti kifejezés értéke független x -től.

b) A harmadik tényező nulla, így a szorzat értéke nulla.

2. Oldjuk meg az egyenletet a valós számok halmazán:

$$3 \cdot \log_8(x-2) + 2 \cdot \log_4(2x) - 5^{1-2\sin x} \cdot \log_2(2x^2 - 4x) = 0. \quad (13 \text{ pont})$$

Megoldás. Az egyenletnek akkor van értelme (a logaritmus miatt), ha $x > 2$. Átírjuk 2-es logaritmusra az egyenletet:

$$\begin{aligned} & \frac{3 \log_2(x-2)}{\log_2 8} + \frac{2 \log_2(2x)}{\log_2 4} - 5^{1-2\sin x} \cdot \log_2(2x^2 - 4x) = 0, \\ & \log_2(x-2) + \log_2(2x) - 5^{1-2\sin x} \cdot \log_2(2x^2 - 4x) = 0, \\ & \log_2(2x^2 - 4x) - 5^{1-2\sin x} \cdot \log_2(2x^2 - 4x) = 0, \\ & \log_2(2x^2 - 4x) \cdot (1 - 5^{1-2\sin x}) = 0. \end{aligned}$$

Innen $1 - 5^{1-2\sin x} = 0$ vagy $\log_2(2x^2 - 4x) = 0$.

Az első esetből $5^{1-2\sin x} = 1 = 5^0$, ahonnan $1 - 2\sin x = 0$, azaz $\sin x = \frac{1}{2}$. Ebből $x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2n\pi$.
Figyelembe véve az $x > 2$ kikötést: $k \in \mathbb{N}^+$, $n \in \mathbb{N}$.

A második esetben $2x^2 - 4x - 1 = 0$. Ennek gyökei: $\frac{4+2\sqrt{6}}{4}$, illetve $\frac{4-2\sqrt{6}}{4}$. A negatív gyök nem megoldás, így az eredeti egyenlet megoldásai: $x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{N}^+$; $x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2n\pi$, $n \in \mathbb{N}$; $x_3 = \frac{4+2\sqrt{6}}{4}$.

3. Egy 305 tagú társaságból elment a nők $a\%$ -a, így a társaság létszáma $\frac{a}{b}\%$ -kal csökkent, ahol $1 < b < 305$ egész szám. Hány férfi van a társaságban? (13 pont)

Megoldás. Jelöljük n -nel a 305 tagú társaságban levő nők számát. Ha elment a nők $a\%$ -a, akkor a társaság létszáma $305 - \frac{na}{100}$. Ezzel az egész társaság létszáma $\frac{a}{b}\%$ -kal csökkent, így felírhatjuk:

$$305 - \frac{na}{100} = 305 \cdot \left(1 - \frac{\frac{a}{b}}{100}\right), \quad \frac{na}{100} = \frac{305a}{100b}, \quad \text{ahonnan} \quad n = \frac{305}{b}.$$

Mivel n pozitív egész, és $b > 1$ egész, továbbá $305 = 5 \cdot 61$, ezért csak $b = 5$ vagy $b = 61$ lehetséges. Ennek megfelelően a nők száma 61 vagy 5, vagyis a társaságban levő férfiak száma 300 vagy 244 fő.

4. Egy konvex sokszög oldalainak a számát megdupláztuk, így átlóinak a száma 400% -kal növekedett.

a) Hány oldalú az eredeti sokszög?

b) Hány százalékkal növekedett a sokszög belső szögeinek összege?

(13 pont)

Megoldás. a) Ha a konvex sokszög oldalainak száma n , akkor átlóinak száma $\frac{n(n-3)}{2}$. Ha az oldalak számát megdupláztuk, akkor a $2n$ oldalú konvex sokszög átlóinak száma $\frac{2n(2n-3)}{2}$. Az utóbbi az előbbinek 400%-kal megnövelt értéke, vagyis 5-szöröse: $5 \cdot \frac{n(n-3)}{2} = \frac{2n(2n-3)}{2}$, $n \neq 0$, tehát ebből $5n - 15 = 4n - 6$, $n = 9$.

Vagyis az eredeti konvex sokszög oldalainak száma: $n = 9$.

b) Az eredeti sokszög belső szögeinek összege: $(n-2) \cdot 180^\circ = 7 \cdot 180^\circ$.

Az új sokszög 18 oldalú, ennek belső szögösszege: $(2n-2) \cdot 180^\circ = 16 \cdot 180^\circ$.

Mivel $\frac{16 \cdot 180}{7 \cdot 180} \approx 2,286$, ezért a belső szögek összege kb. 128,6%-kal növekedett.

II. rész

5. Milyen görbén helyezkednek el az $y = x^2 + mx + 1$ ($m \in \mathbb{R}$) parabolák csúcspontjai (tengelypontjai)? (16 pont)

Megoldás. A függvényt teljes négyzetté alakítva:

$$y = \left(x + \frac{m}{2}\right)^2 - \frac{m^2 - 4}{4}.$$

Ezt összehasonlítva az $(u; v)$ csúcspontú $y - v = \frac{1}{2p}(x - u)^2$ parabolaegyenlettel a következőt kapjuk a csúcspont

koordinátáira: $u = -\frac{m}{2}$, $v = -\frac{m^2 - 4}{4}$. A

$$v = -\frac{m^2 - 4}{4} = -\left(\frac{m}{2}\right)^2 + 1 = -\left(-\frac{m}{2}\right)^2 + 1$$

átalakítás után megállapítható, hogy $u = -\frac{m}{2}$ és $v = -\left(-\frac{m}{2}\right)^2 + 1$. Ez $\left(-\frac{m}{2}\right)$ -re másodfokú, tehát parabola, egyenlete: $y = -x^2 + 1$.

A keresett ponthalmaz tehát parabola, egyenlete $y = -x^2 + 1$.

6. Egy egyetem I. évfolyamán a nappali tagozatos hallgatók 20%-a jelesre vizsgázott analízisből. A levelező tagozaton 30%, míg a távoktatásban 10% volt a jelesek aránya. Az egyes tagozatok létszámáról tudjuk, hogy kétszer annyi távoktatásban részt vevő van, mint levelező, és a nappalisok és a távoktatásban részt vevők száma egyenlő.

a) Véletlenszerűen választva egy hallgatót, mekkora az esélye, hogy analízis jegye jeles?

b) Ha a véletlenül választott hallgató analízis jegye jeles, akkor mi az esélye, hogy ő nappalis?

c) A b)-beli feltétel mellett mi az esélye, hogy levelező, illetve távoktatásban szereplő hallgató az illető? (16 pont)

Megoldás. a) A levelezős diákok száma x , a nappalis, illetve a távoktatásban tanulóké pedig $2x$.

A nappalisok közül $0,2 \cdot 2x = 0,4x$ tanuló jelest, míg $0,8 \cdot 2x = 1,6x$ tanuló nem jelest kapott.

A levelezősök közül $0,3x$ diák jelest, és $0,7x$ diák más jegyet kapott.

Végül, a távoktatás hallgatók közül $0,1 \cdot 2x = 0,2x$ diák kapott jelest, $1,8x$ diák pedig egyéb érdemjegyet.

Az összes hallgatók száma $5x$. A kedvező esetek száma: $0,4x + 0,3x + 0,2x = 0,9x$.

A kért valószínűség:

$$P = \frac{\text{kedvező}}{\text{összes}} = \frac{0,9x}{5x} = 0,18.$$

b) Az összes jelest kapott hallgató száma $0,9x$. A nappali tagozatos, jelest kapott (ami most a kedvező eset) diákok száma pedig $0,4x$.

A valószínűség:

$$P = \frac{\text{kedvező}}{\text{összes}} = \frac{0,4x}{0,9x} = \frac{4}{9}.$$

c) Távoktatásban $0,2x$ diák kapott jelest, tehát

$$P = \frac{0,2x}{0,9x} = \frac{2}{9}.$$

Mivel $0,3x$ levelező hallgató kapott jelest, azért

$$P = \frac{0,3x}{0,9x} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}.$$

7. a) Határozzuk meg $n \rightarrow \infty$ esetén az

$$a_n = \frac{2n^2 + 3n - 1}{n^2 + 4}$$

sorozat határértékét, s azt az n számot, amelytől kezdve a sorozat elemei a sorozat határértékétől $\frac{1}{200}$ -nál kisebb értékkel térnek el.

b) Bizonyítsuk be teljes indukcióval, hogy $6 \mid n^3 + 5n$, ha n pozitív egész szám. (16 pont)

Megoldás. a) $A = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 3n - 1}{n^2 + 4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{3}{n} - \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{4}{n^2}} = 2.$

A sorozat határértéke 2.

Meg kell állapítani, hogy milyen n -től kezdve lesz $|a_n - A| < \frac{1}{200}$, azaz

$$\left| \frac{2n^2 + 3n - 1}{n^2 + 4} - 2 \right| < \frac{1}{200}.$$

Elvégezve az összevonásokat: $\left| \frac{3n - 9}{n^2 + 4} \right| < \frac{1}{200}.$

Mivel $n > 3$ esetén a bal oldal pozitív, ezért az abszolút érték jele elhagyható: $\frac{3n - 9}{n^2 + 4} < \frac{1}{200}$. Az egyenlőtlenséget rendezve kapjuk: $n^2 - 600n + 1804 > 0$. Az $n^2 - 600n + 1804 = 0$ egyenletet megoldva kapjuk, hogy $n_1 \approx 3,02$ és $n_2 \approx 596,98$. Sorozatról van szó, így csak $n \geq 597$ lehet a megoldás.

b) Az állítást $n = 1$ -re felírva: $1 + 5 = 6$, ami nyilván osztható 6-tal, tehát $n = 1$ -re az állítás igaz.

Tegyük fel, hogy $k = n$ esetén teljesül, hogy $6 \mid k^3 + 5k$.

Írjuk fel a kifejezést $n = k + 1$ -re:

$$(k + 1)^3 + 5(k + 1) = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 5k + 5 = (k^3 + 5k) + (3k^2 + 3k) + 6.$$

Az $k^3 + 5k$ az indukciós feltétel miatt osztható 6-tal. $3k(k + 1)$ a 3 miatt osztható 3-mal, a $k(k + 1)$ pedig két egymást követő természetes szám szorzata és így osztható 2-vel. A kifejezés tehát három 6-tal osztható tag összege, így osztható 6-tal.

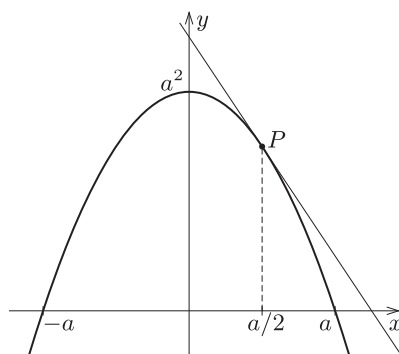
A bizonyítást befejeztük.

8. Az $f(x) = -x^2 + a^2$ ($a > 0$) függvény görbájének x tengely fölötti részét körbeforgatjuk az x tengely körül 360° -kal. A keletkezett forgástest térfogata az a sugarú gömb térfogatának kétszerese.

a) Határozzuk meg az a paraméter értékét.

b) Mekkora területű háromszöget vág le a koordinátatengelyekből a függvény $x = \frac{a}{2}$ helyhez tartozó érintője? (16 pont)

Megoldás. A függvény képe egy lefelé nyíló parabola, melynek zérushelyei a -ban és $(-a)$ -ban vannak, az y tengelyt pedig a^2 -ben metszi.



a) Az x tengely feletti rész x tengely körüli 360° -os elforgatottjának térfogata:

$$V = \pi \int_{-a}^a f^2(x) dx.$$

A szimmetria miatt az integrált elég kiszámítani a $[0; a]$ intervallumban, és a kapott eredmény kétszeresét venni:

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^a (-x^2 + a^2)^2 dx = 2\pi \int_0^a (x^4 + a^4 - 2x^2 a^2) dx = \\ &= 2\pi \left[\frac{x^5}{5} + a^4 x - 2a^2 \frac{x^3}{3} \right]_0^a = 2\pi \left(\frac{a^5}{5} + a^5 - \frac{2}{3} a^5 \right) = \frac{16a^5 \pi}{15}. \end{aligned}$$

A feltétel szerint ez a térfogat az a sugarú gömb térfogatának kétszerese, vagyis $\frac{16a^5\pi}{15} = \frac{8a^3\pi}{3}$, amiből $a^2 = \frac{5}{2}$, és így $a = \sqrt{\frac{5}{2}}$ ($a > 0$).

b) Az $\frac{a}{2}$ abszcisszájú P pont koordinátái $P\left(\frac{a}{2}; f\left(\frac{a}{2}\right)\right)$, azaz $P\left(\frac{a}{2}; \frac{3}{4}a^2\right)$. Az érintő m meredeksége az $x = \frac{a}{2}$ helyen vett differenciáhányados értéke. Mivel $f'(x) = (-x^2 + a^2)' = -2x$, ezért $m = f'\left(\frac{a}{2}\right) = -2 \cdot \frac{a}{2} = -a$.

Az érintő egyenlete: $y - \frac{3}{4}a^2 = -a\left(x - \frac{a}{2}\right)$. Ez az érintő az x tengelyt az $(x_1; 0)$ pontban, az y tengelyt a $(0; y_1)$ pontban metszi, és így $y_1 - \frac{3}{4}a^2 = \frac{a^2}{2}$, illetve $-\frac{3}{4}a^2 = -ax_1 + \frac{a^2}{2}$. Ebből pedig $y_1 = \frac{5}{4}a^2$, valamint $x_1 = \frac{5}{4}a$ következik.

Így a derékszögű háromszög területe: $T = \frac{x_1 y_1}{2} = \frac{25}{32}a^3$ területegység.

9. *Négy egész szám közül az első három egy számtani, az utolsó három egy mértani sorozat három szomszédos eleme. A két középső szám összege 50, a két szélső szám összege 55. Melyik ez a négy szám?* (16 pont)

Megoldás. Legyen a négy szám: a, b, c, d . A feltételek alapján:

$$\begin{aligned} (1) \quad & \frac{a+c}{2} = b, \\ (2) \quad & c^2 = bd, \\ (3) \quad & a+d = 55, \\ (4) \quad & b+c = 50. \end{aligned}$$

Ez utóbbiból $b = 50 - c$ következik. Ezt (1)-be helyettesítve: $\frac{a+c}{2} = 50 - c$, vagyis $a = 100 - 3c$.

A kapott eredményt (3)-ba írva: $100 - 3c + d = 55$, vagyis $d = 3c - 45$.

A részeredményeket (2)-be helyettesítve kapjuk: $c^2 = (50 - c)(3c - 45)$.

Rendezés után: $4c^2 - 195c + 2250 = 0$. Ennek megoldásai: $c_1 = 30$, $c_2 = 18,75$.

A feladat értelmében egész számokat keresünk, így csak a $c = 30$ lehet a megoldás.

Így a négy szám: 10, 20, 30, 45, amelyek megfelelnek a feltételnek.