

I. rész

1. $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

a) Hány $f: A \rightarrow B$ függvény létezik?

b) Ezek közül hány olyan van, amely szigorúan monoton növe?

c) Az a) pontban tekintett összes függvény között hány olyan van, amelynek értékkészlete pontosan három elemet tartalmaz? (12 pont)

Megoldás. a) Az A halmaz minden eleméhez a B halmaz bármelyik elemét rendelhetem, azaz nyolc elem közül választhatok. Mivel az A halmazban négy elem van, a függvények száma: $8^4 = 4096$.

b) Ilyenkor az értékkészlet négy elemű. A B halmazból tetszőlegesen választott négy elem esetén a szigorúan monoton növe függvény egyértelműen meghatározott. A keresett függvények száma tehát: $\binom{8}{4} = 70$.

c) Ha az értékkészlet három elemű, akkor az A halmaz két eleméhez ugyanazt rendeljük, a másik kettőnek az értéke viszont ettől és egymástól is különböző. Kiválasztjuk A azon két elemét, melyek értéke azonos lesz, ezt $\binom{4}{2} = 6$ féleképpen lehet megtenni, hozzájuk a B halmazból nyolc féle elemet rendelhetünk. Az A halmazból a maradék két elem közül a kisebbhez hét, a nagyobbhoz hat féle számot rendelhetünk a B halmazból. Tehát a keresett függvények száma: $\binom{4}{2} \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 2016$.

2. a) Osszuk fel az 1-et négy nemnegatív részre úgy, hogy a részek számtani sorozatot alkossanak. Milyen nagy lehet a sorozat differenciája?

b) Osszuk fel az 1-et négy részre úgy, hogy a részek 2 hányadosú mértani sorozatot alkossanak. Mennyi a sorozat első eleme?

c) Osszuk fel az 1-et négy részre úgy, hogy a részek mértani sorozatot alkossanak. Milyen nagy lehet a sorozat hányadosa? (12 pont)

Megoldás. a) Jelölje a számtani sorozat első elemét a , a differenciát d . Ekkor $a \geq 0$. A feltétel szerint $1 = 4a + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3d$, azaz $1 \geq 6d$, tehát $\frac{1}{6} \geq d$ és $a = \frac{1}{4} - \frac{3}{2}d$. A $d = \frac{1}{6}$ eset is lehetséges, ekkor $a = 0$.

b) Legyen a sorozat első eleme g . Ekkor $1 = g(2^4 - 1) = 15g$, azaz $g = \frac{1}{15}$.

c) Jelölje az első elemet g , a hányadost pedig q . Most $q > 0$, így $g > 0$. A feltétel szerint $1 = g \frac{q^4 - 1}{q - 1}$, ahonnan $\frac{1}{g} = q^3 + q^2 + q + 1 < 4q^3$, ha $q > 1$. Mivel g -ről csak annyit kötöttünk ki, hogy pozitív, $\frac{1}{g}$ akármilyen nagy lehet. Innen pedig következik, hogy a mértani sorozat hányadosa is akármilyen nagy lehet.

3. Adjuk meg az $f(x) = x + \sqrt{x^2 - 4}$ függvény értelmezési tartományát és értékkészletét. (13 pont)

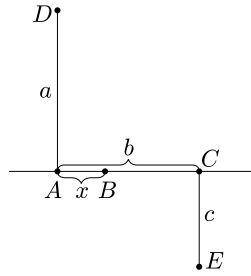
Megoldás. A függvény értelmezési tartománya a -2 -nél nem nagyobb, illetve a 2 -nél nem kisebb számok. Vizsgáljuk meg, hogy az $y = x + \sqrt{x^2 - 4}$ paraméteres egyenletnek milyen y -ra van megoldása. Rendezve: $y - x = \sqrt{x^2 - 4}$. Az $x^2 \geq 4$ feltételt teljesítő számok adják a jobb oldal értelmezési tartományát, és csak olyan x értékek adhatnak megoldást, melyekre $y \geq x$. Elvégezve a négyzetre emelést, rendezés után az $y^2 + 4 = 2yx$ egyenletre jutunk. Ennek (és az eredetinek) $y = 0$ esetén nincs megoldása, tehát $x = \frac{y^2 + 4}{2y}$. Figyelembe véve az $y \geq x$ feltételt, $0 \geq \frac{4 - y^2}{2y}$. Ennek megoldása: $-2 \leq y < 0$ vagy $2 \leq y$. Ezekhez az y értékekhez tartozó x -ek megoldásai a feladatnak, így megkaptuk az értékkészletet.

4. Keressük meg az alábbi függvény minimumhelyét:

$$f(x) = \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{(b - x)^2 + c^2}, \quad \text{ahol } a, b, c, x \in \mathbb{R}^+.$$

(14 pont)

Megoldás. A feladat szövegéből nem következik, hogy geometriai szélsőérték problémával van dolgunk, de a „Pithagorasz-tétel gyanús” kifejezések látványa, és a feladatban szereplő pozitív paraméterek orientálják a megoldást.



Vegyük fel az $AC = b$ hosszúságú szakaszt, annak végpontjaiban, AC -re merőlegesen, az AC egyenes különböző partján az $AD = a$ és a $CE = c$ hosszúságú szakaszokat. B pont végigfut az AC félegyenesen. Legyen $AB = x$.

Ekkor $f(x)$ éppen az ADB és a BCE derékszögű háromszögek átfogóinak összege. E két szakasz összege pedig (a háromszög egyenlőtlenség miatt) B minden helyzetében nagyobb, vagy egyenlő, mint a DE szakasz. Egyenlőség akkor és csak akkor van, ha a B pont éppen az AC és a DE egyenesek metszéspontja. Tehát ekkor minimális a függvényérték. Ezután az ADB és BCE derékszögű háromszögek hasonlóságából kiszámítható x értéke: $a : x = c : (b - x)$, ahonnan $x = \frac{ab}{a + c}$.

II. rész

5. Adjunk meg 13 darab pozitív egész számot úgy, hogy a mediánjuk 2, az átlaguk 2000 legyen. Létezik-e ilyen sokaság, ha azt is megköveteljük, hogy egyetlen módusza legyen, aminek értéke

- a) 1;
- b) 2;
- c) 1514;
- d) 6000?

e) Mennyi lehet maximum a módusz?

(14 pont)

Megoldás. A feltételek szerint a nagyság szerint rendezett minta hetedik eleme 2, az elemek összege $13 \cdot 2000 = 26\,000$.

a) Ha az egyetlen módusz az 1, akkor például kielégíti a feltételeket a következő számsorozat: 1; 1; 1; 1; 1; 1; 2; 2; 2; 2; 12 992; 12 992.

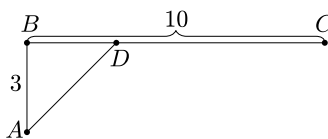
b) Ha az egyetlen módusz a 2, akkor például kielégíti a feltételeket a következő számsorozat: 2; 2; 2; 2; 2; 2; 2; 2; 2; 2; 25 976.

c) Ha az egyetlen módusz az 1514, akkor például kielégíti a feltételeket a következő számsorozat: 1; 1; 1; 1; 2; 2; 2; 1514; 1514; 1514; 1514; 1514; 18 420.

d) A számok között az 1-es és a 2-es közül legalább az egyikből négy darab van. Ha az egyetlen módusz a 6000, akkor abból legalább ötnak kell lennie, de akkor a számok összege már több, mint 26 000, ami ellentmondás.

e) Nem lehet a számok között hat darab 1-es, mert akkor a keresett szám nem az egyetlen módusz. Öt darab 1-es mellé hat egyforma elem kell, és ennek maximuma biztos kisebb, mint ha csak öt nagy szám kell, és az egyik 1-est 2-esre cseréljük. Ebből következik, hogy az első hét szám összege legalább $4 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 10$. Nézzük meg, hogy ezt 26 000-ből kivonva, mi a legnagyobb szám, ami még ötször választható. Ez az 5198. Ekkor azonban a 13. értéknek 0-nak kellene lennie, ami lehetetlen. A maximális módusz tehát az 5197, ami jó is. Pl.: 1; 1; 1; 1; 2; 2; 2; 5; 5197; 5197; 5197; 5197; 5197.

6. Egy gyalogos a hóval borított mező A pontjában van, 3 kilométernyire a BC egyenes úttól (az ábrán $AB = 3$ km, $BC = 10$ km).



Az országúton a gyalogos kétszer akkora sebességgel halad, mint a hómezőn. Mely D pontban kell kimennie a gyalogosnak az útra, hogy a legrövidebb idő alatt jusson C -be? (16 pont)

Első megoldás (paraméterezés). Legyen $BD = x$, ekkor $DC = 10 - x$, $AD = \sqrt{x^2 + 9}$.

Ha a gyalogos sebessége a hómezőn v , az országúton $2v$, akkor az ADC utat $t = \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{v} + \frac{10 - x}{2v}$ idő alatt teszi meg. Megkeressük azon t értékeket, amelyekre a $t = \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{v} + \frac{10 - x}{2v}$ egyenletnek van megoldása. (Azt is láthatjuk, hogy a szélsőérték hely meghatározásakor pl. egységnyiére választhatjuk a v sebességet.)

Rendezzük át az egyenletet, emeljük négyzetre és vizsgáljuk meg az így kapott másodfokú paraméteres egyenletet:

$$\begin{aligned} 2\sqrt{x^2 + 9} &= 2t + x - 10, \\ 4x^2 + 36 &= 4t^2 + x^2 + 100 - 40t + 4tx - 20x, \\ 3x^2 + 4x(5 - t) - 4(t^2 - 10t + 16) &= 0. \end{aligned}$$

Világos, hogy ennek az egyenletnek akkor lehet megoldása, ha diszkriminánsa nemnegatív:

$$\begin{aligned} D &= 16(5 - t)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-4) \cdot (t^2 - 10t + 16) \geq 0, \\ 4t^2 - 40t + 73 &\geq 0, \\ 4 \left(t - 5 - \frac{3}{2}\sqrt{3} \right) \left(t - 5 + \frac{3}{2}\sqrt{3} \right) &\geq 0, \end{aligned}$$

s ekkor $t \leq 5 - \frac{3}{2}\sqrt{3}$ vagy $t \geq 5 + \frac{3}{2}\sqrt{3}$.

$AC = \sqrt{10^2 + 9} \approx 10,44$. Ha ezt az utat az „országúti” sebességgel tenné meg a gyalogos, akkor is $\frac{10,44}{2} = 5,22$ egységnyi időre lenne szüksége; vagyis a $t \leq 5 - \frac{3}{2}\sqrt{3}$ lehetőséget kizárhatjuk. Kaptuk: $t \geq 5 + \frac{3}{2}\sqrt{3}$, vagyis ha a gyalogos sebessége v , akkor legkevesebb

$$\frac{5 + \frac{3}{2}\sqrt{3}}{v}$$

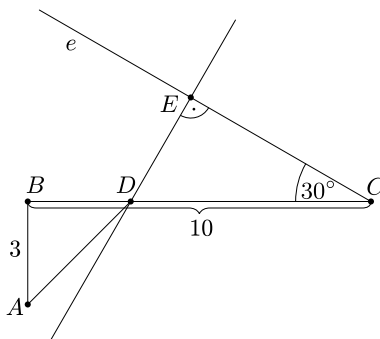
egységnyi idő alatt tudja megtenni az ADC utat.

Ha a $3x^2 + 4x(5 - t) - 4(t^2 - 10t + 16) = 0$ egyenlet diszkriminánsa 0, akkor

$$x = \frac{4(t - 5)}{2 \cdot 3} = \sqrt{3}.$$

Második megoldás (elemi geometria). Átfogalmazzuk a feladatot: ha a gyalogos sebessége a hómezőn egységnyi, akkor a BC egyenesen olyan D pontot keresünk, amelyre $AD + \frac{DC}{2}$ minimális.

Vegyük fel a BC egyenes által meghatározott, A -t nem tartalmazó félsíkban a C -ből kiinduló e félegyenest úgy, hogy BC -vel bezárt szöge 30° legyen, majd bocsássunk D -ből merőlegest erre az egyenesre (a talppontot jelöljük E -vel).

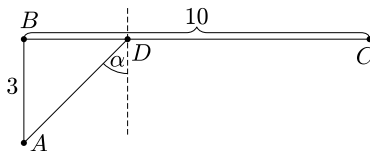


Ekkor $DE = \frac{DC}{2}$ (hiszen az EDC derékszögű háromszög egy szabályos háromszög fele), s tetszőleges D pont esetén az $AD + DE$ összeget kell minimalizálnunk, ahol DE merőleges e -re. $AD + DE$ akkor lesz a lehető legkisebb, ha ez a három pont egy egyenesbe esik, vagyis ha $\angle ADB = 60^\circ$.

Ez az eredmény természetesen ugyanaz, mint az előző megoldásban kapott érték, hiszen

$$\sqrt{3} = \tan 60^\circ = \frac{AB}{BD} = \frac{3}{\sqrt{3}}.$$

Harmadik megoldás (fizikai szemlélet). Képzeljük el, hogy az A pontba egy fényforrást helyezünk, ahonnan a fény a két közeg határvonalán lévő C pontba jut. Mivel a fény két pont között mindig a minimális ideig tartó úton halad, nekünk a feladatban éppen azt a D pontot kell meghatároznunk, amely mellett a fénysugár beesési szöge a határszöggel egyezik meg, azaz a törési szög 90° .



A geometriai optika Snellius–Descartes-törvénye szerint

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{v_1}{v_2},$$

ahol α és β a beesési és törési szög, v_1 és v_2 a fény sebessége a két közegben. Ebben az esetben a BAD szög megegyezik a beesési szöggel (váltószögek), tehát

$$\frac{\sin BAD}{\sin 90^\circ} = \frac{v}{2v}.$$

Innen már megkapjuk a $BAD = 30^\circ$ -os eredményt.

Negyedik megoldás (deriválás). A $t = \sqrt{x^2 + 9} + \frac{10 - x}{2}$ függvény deriváltja

$$t' = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 9}} \cdot 2x - \frac{1}{2},$$

ennek zérushelye:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 9}} \cdot 2x - \frac{1}{2} &= 0, \\ \sqrt{x^2 + 9} &= 2x, \end{aligned}$$

s mivel $x > 0$, azért $x^2 + 9 = 4x^2$, amiből $x = \sqrt{3}$.

Ha $x < \sqrt{3}$, akkor $t' < 0$; ha $x > \sqrt{3}$, akkor $t' > 0$. Ezért t -nek az $x = \sqrt{3}$ helyen minimuma van.

7. Egy társaságban öt ember találkozott, jelölje őket A, B, C, D, E . Köztük az ismeretségek kölcsönösek. Megkérdeztük őket, kinek hány ismerőse van ötük között. A azt mondta, négy embert ismer. C -ről kiderült, hogy ugyanannyi ismerőse van, mint D -nek. D azt mondta, hogy eggyel kevesebb ismerőse van, mint E -nek. E ismerőseinek száma páratlan.

- Hány embert ismer D ?
- Ismerheti-e egymást B és D ?
- Ismerheti-e egymást C és D ?

(16 pont)

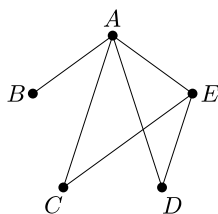
Megoldás. Mivel A négy embert ismer, ő mindenkit ismer. Ez azt is jelenti, hogy mindenki más legalább egy embert ismer, hiszen A -t ismerik.

Ezek szerint D is legalább egy embert ismer. E több embert ismer, mint D és páratlan sokat, tehát hármat ismer. Ebből kiderül, hogy D is és C is 2 embert ismer.

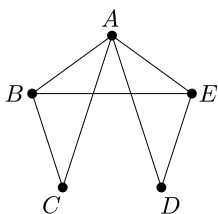
Az ismerősök számáról tehát a következőket tudjuk: A -nak 4, B -nek b , C -nek 2, D -nek 2, E -nek 3. Most megmutatjuk, hogy B -nek 1 vagy 3 ismerőse lehet.

Szemléltessük az ismeretségeket egy rajzon; az embereket jelölje egy-egy pont, és ha ismerik egymást, kössük össze őket. Az összekötő vonalak végpontjainak száma a vonalak számának kétszerese. Ez éppen az egyes emberek ismerősei számának összege. (A gráfok nyelvén: az élek számának kétszerese a fokszámok összege.) Ez utóbbi $4 + b + 2 + 2 + 3 =$ (a vonalak számának kétszerese). Ezek szerint b páratlan, tehát 1 vagy 3 lehet.

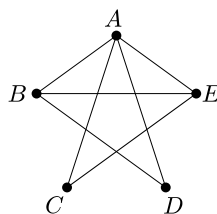
Az ismeretségeket szemléltető gráfok a következők lehetnek:



1. ábra



2. ábra



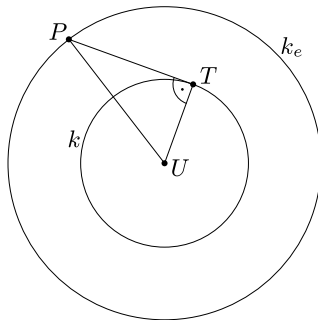
3. ábra

A 3. ábra mutatja, hogy B és D ismerheti egymást.

Ha C és D ismerné egymást, akkor nekik már nem lehetne további ismerősük, így E csak A -t és B -t ismerhetné és nem lenne 3 ismerőse. Tehát C és D nem ismerik egymást.

8. Jelölje k az $x^2 + y^2 - 25x - 48y + 576 = 0$ egyenletű kört. Határozzuk meg k minden olyan érintő egyenesének egyenletét, amelyre teljesül, hogy az y tengely és a k kör közé eső szakaszának hossza 9,375 egység. (16 pont)

I. megoldás (a szerkesztést követve). Keressük meg ezen érintők y tengellyel vett metszéspontját. Határozzuk meg először azon pontok mértani helyét, amelyekből a k körhöz húzott érintő hossza 9,375 egység. Ennek a mértani helynek az y tengellyel való metszéspontjai lesznek a keresett pontok.



A vizsgált mértani hely egy k -val koncentrikus k_e kör. Valóban, ha a P pontból az U középpontú k körhöz húzott PT érintőszakasz hossza rögzített, PU értéke is állandó, hiszen az UTP derékszögű háromszögben $PU^2 = PT^2 + TU^2$.

Esetünkben k egyenlete $(x - 12,5)^2 + (y - 24)^2 = 12,5^2$ alakba írható át, azaz $U(12,5; 24)$, $r = TU = 12,5$, így a $P(x, y)$ pontból k -hoz húzott érintő hossza pontosan akkor 9,375 egység, ha

$$k_e: (x - 12,5)^2 + (y - 24)^2 = 9,375^2 + 12,5^2.$$

Az y tengely pontjait az $x = 0$ feltétel jellemzi, tehát a keresett pontok y koordinátáira

$$(0 - 12,5)^2 + (y - 24)^2 = 9,375^2 + 12,5^2, \quad \text{amiből} \quad y = 24 \pm 9,375,$$

azaz $P_1(0; 33,375)$, $P_2(0; 14,625)$.

Ekkor a P_1 ponton átmenő érintő egyenlete

$$y = mx + (24 + 9,375) = mx + 24 + \frac{75}{8}.$$

Ezt behelyettesítve a k kör egyenletébe:

$$x^2 + \left(mx + 24 + \frac{75}{8}\right)^2 - 25x - 48\left(mx + 24 + \frac{75}{8}\right) + 576 = 0.$$

Rendezve:

$$(m^2 + 1)x^2 - \left(25 - \frac{75}{4}m\right)x + \left(\frac{75}{8}\right)^2 = 0.$$

Pontosan akkor lesz az egyenes érintő, ha ennek a másodfokú egyenletnek a diszkriminánsa 0:

$$\left(25 - \frac{75}{4}m\right)^2 - 4(m^2 + 1)\left(\frac{75}{8}\right)^2 = 0, \quad \text{amiből} \quad -25 \cdot \frac{75}{2}m = 4 \cdot \frac{75^2}{8^2} - 25^2,$$

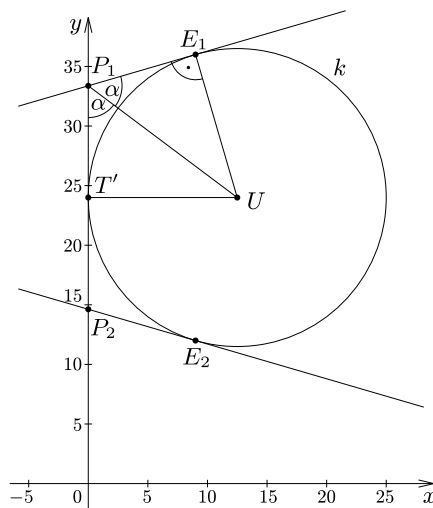
vagyis $m = \frac{7}{24}$. Az egyenlet: $y = \frac{7}{24}x + 24 + \frac{75}{8}$.

A P_2 -n átmenő érintő ennek az $y = 24$ egyenesre vonatkozó tükörképe, tehát meredeksége $-\frac{7}{24}$, egyenlete pedig $y = -\frac{7}{24}x + 24 - \frac{75}{8}$.

II. megoldás (ad hoc). Vegyük észre, hogy a k kör egyenlete

$$(x - 12,5)^2 + (y - 24)^2 = 12,5^2,$$

vagyis a kör a $T'(0; 24)$ pontban érinti az y tengelyt.



Az y tengely tetszőleges P pontjából a k körhöz húzott $P'T$ érintő hossza az érintő szakaszok egyenlősége révén PT' -vel egyenlő, azaz a keresett pontok:

$$P_{1,2}(0; 24 \pm 9,375).$$

Mivel $9,375 < 12,5$, ezért a P_1 pontból húzott érintő meredeksége pozitív, a P_2 pontból húzotté pedig negatív. Legyen $T'P_1U \sphericalangle = \alpha$, ekkor $E_1P_1U \sphericalangle = \alpha$ és $T'P_1E_1 \sphericalangle = 2\alpha$, valamint

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{12,5}{\frac{75}{8}} = \frac{\frac{25}{2}}{\frac{75}{8}} = \frac{4}{3}.$$

A P_1 -ből húzott érintő m meredekségére:

$$\begin{aligned} m &= \operatorname{tg}(2\alpha - 90^\circ) = \operatorname{tg}(\alpha + (\alpha - 90^\circ)) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg}(\alpha - 90^\circ)}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg}(\alpha - 90^\circ)} = \\ &= \frac{\operatorname{tg} \alpha - \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}}{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}} = \frac{\frac{4}{3} - \frac{3}{4}}{2} = \frac{7}{24}. \end{aligned}$$

(Felhasználtuk, hogy $\operatorname{tg} \alpha = -\operatorname{tg}(-\alpha)$ és $\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$.)

Tehát (a szimmetria miatt) két érintő van, amely teljesíti a feltételt:

$$y = \frac{7}{24}x + 24 + \frac{75}{8} \quad \text{és} \quad y = -\frac{7}{24}x + 24 - \frac{75}{8}.$$

9. Három egymás utáni pozitív egész szám szorzatának prímtényezősz felbontásában csak két különböző prímszám szerepel (tehát a szorzat $p^n q^m$ alakú, ahol p és q prímszám, n, m pozitív egészek). Adjuk meg az összes ilyen számhármast. (16 pont)

I. megoldás. A középső szám nagyobb 1-nél, tehát felbontásában szerepel legalább egy prímtényező.

A középső szám mindkét szomszédjához relatív prím, ezért a benne szereplő prímtényező a másik két számban nem szerepelhet, e két számban tehát összesen csak egy prímtényező szerepelhet.

Viszont e két számnak csak a 2 lehet közös osztója, mert különbségük 2. Ez kétféleképp lehetséges: vagy az első szám 1, vagy mindkét szám 2-hatvány.

Az első esetben az 1, 2, 3 számokat kapjuk.

A második esetben két 2-hatvány különbsége 2, ez csak úgy lehet, ha a két szám a 2 és a 4, így a 2, 3, 4 számokat kapjuk.

A feladat feltételének két számhármast felel meg: 1, 2, 3 és 2, 3, 4.

II. megoldás. Két szomszédos szám között van egy páros, tehát a három szám szorzata páros. Így az egyik prím a 2, a másik egy páratlan prím. Legyen ez p .

Ha a középső szám páros, akkor a két szélső páratlan. Nem lehet mindkettő osztható p -vel, mert p nagyobb kettőnél. Tehát az egyik szám az 1, és mivel csak az első szám lehet 1, azért a három szám az 1, 2, 3.

Ha a középső szám páratlan, akkor a két szélső páros, és mindkettő relatív prím a középsőhöz, ezért egyik sem osztható p -vel. De akkor mindkettő kettőhatvány. A kettőhatványok sorában: 1, 2, 4, 8, ... Csak egy esetben 2 a különbség két (nem feltétlenül szomszédos) szám között: a 2 és a 4 esetében. Tehát a három szám a 2, 3, 4.

A feladatnak tehát két számhármast tesz eleget: 1, 2, 3 és 2, 3, 4.