

I. rész

1. a) Bizonyítsuk be, hogy az alábbi kifejezés értéke x -től független:

$$\sin^2 x (\sin^4 x + \sin^2 x + 2) + \cos^2 x (\cos^4 x + \cos^2 x + 2) + \frac{\sin^2 2x}{4} \cdot (3 \sin^2 x + 3 \cos^2 x + 2).$$

- b) Számológép nélkül adjuk meg a következő kifejezés pontos értékét:

$$(1 + \operatorname{tg} 137^\circ)(1 + \operatorname{tg} 136^\circ)(1 + \operatorname{tg} 135^\circ)(1 + \operatorname{tg} 134^\circ).$$

(12 pont)

2. Oldjuk meg az egyenletet a valós számok halmazán:

$$3 \cdot \log_8(x-2) + 2 \cdot \log_4(2x) - 5^{1-2\sin x} \cdot \log_2(2x^2 - 4x) = 0.$$

(13 pont)

3. Egy 305 tagú társaságból elment a nők $a\%$ -a, így a társaság létszáma $\frac{a}{b}\%$ -kal csökkent, ahol $1 < b < 305$ egész szám. Hány férfi van a társaságban?

(13 pont)

4. Egy konvex sokszög oldalainak a számát megdupláztuk, így átlóinak a száma 400% -kal növekedett.

a) Hány oldalú az eredeti sokszög?

b) Hány százalékkal növekedett a sokszög belső szögeinek összege?

(13 pont)

II. rész

5. Milyen görbén helyezkednek el az $y = x^2 + mx + 1$ ($m \in \mathbb{R}$) parabolák csúcspontjai (tengelypontjai)? (16 pont)

6. Egy egyetem I. évfolyamán a nappali tagozatos hallgatók 20% -a jelesre vizsgázott analízisből. A levelező tagozaton 30% , míg a távoktatásban 10% volt a jelesek aránya. Az egyes tagozatok létszámáról tudjuk, hogy kétszer annyi távoktatásban részt vevő van, mint levelező, és a nappalisok és a távoktatásban részt vevők száma egyenlő.

a) Véletlenszerűen választva egy hallgatót, mekkora az esélye, hogy analízis jegye jeles?

b) Ha a véletlenül választott hallgató analízis jegye jeles, akkor mi az esélye, hogy ő nappalis?

c) A b)-beli feltétel mellett mi az esélye, hogy levelező, illetve távoktatásban szereplő hallgató az illető? (16 pont)

7. a) Határozzuk meg $n \rightarrow \infty$ esetén az

$$a_n = \frac{2n^2 + 3n - 1}{n^2 + 4}$$

sorozat határértékét, s azt az n számot, amelytől kezdve a sorozat elemei a sorozat határértékétől $\frac{1}{200}$ -nál kisebb értékkel térnek el.

b) Bizonyítsuk be teljes indukcióval, hogy $6 \mid n^3 + 5n$, ha n pozitív egész szám.

(16 pont)

8. Az $f(x) = -x^2 + a^2$ ($a > 0$) függvény görbéjének x tengely fölötti részét körbeforgatjuk az x tengely körül 360° -kal. A keletkezett forgástest térfogata az a sugarú gömb térfogatának kétszerese.

a) Határozzuk meg az a paraméter értékét.

b) Mekkora területű háromszöget vág le a koordinátatengelyekből a függvény $x = \frac{a}{2}$ helyhez tartozó érintője? (16 pont)

9. Négy egész szám közül az első három egy számtani, az utolsó három egy mértani sorozat három szomszédos eleme. A két középső szám összege 50, a két szélső szám összege 55. Melyik ez a négy szám? (16 pont)