

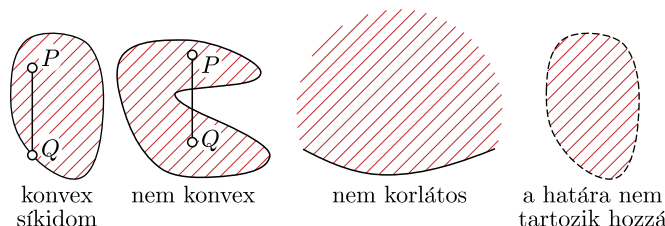
1. Bevezetés

Bár a konvex geometriának, a geometriának a konvex testekkel és síkidomokkal foglalkozó ágának gyökerei Euklidészhez és Arkhimédészhez nyúlnak vissza, a konvex testek szisztematikus vizsgálata a 20. század elején kezdődött Hermann Brunn és Hermann Minkowski munkásságával. Azóta ez a tudományág nagy jelentőségre tett szert, és a természettudományok számos ágában alkalmazásra került. A cikk célja ezen relatíve fiatal tudományterület egy ismert problémájának bemutatása.

Ehhez először definiáljuk a szükséges alapfogalmakat.

1. definíció. A K síkbeli halmazt *konvex síkidomnak* vagy *konvex lemeznek* nevezzük, ha

- (1) K bármely két pontját összekötő szakasz is K -hoz tartozik (minden pontjából belátjuk az egész alakzatot);
- (2) K korlátos (belerakható pl. egy nagy körbe);
- (3) K határa, mely egy zárt, folytonos, önmagát nem metsző görbe, is K -hoz tartozik.



Hasonlóan lehet definiálni a konvex test fogalmát is, magasabb dimenzióban. A fenti fogalom gyengébb változataira is szükségünk lesz. Amennyiben az (1)-es tulajdonság helyett azt követeljük meg, hogy K -nak *van olyan* pontja, melyet K bármely másik pontjával összekötő szakasz K -hoz tartozik, azt mondjuk, hogy K egy *csillagszerű tartomány*. Ezt úgy fogalmazhatjuk meg, hogy K -nak legalább egy pontjából belátni K -t. Ha elhagyjuk az (1)-es, de megtartjuk a másik két tulajdonságot, azt mondjuk, K egy *topologikus lemez*, vagy egyszerűen *lemez* vagy *síkidom*.

Minden lemezre, így csillagszerű vagy konvex lemezre is érvényes az alábbi észrevétel.

1. megjegyzés. Legyen S egy lemez. Ekkor minden egyenesnek pontosan két eltoltja van, ami S -et érinti.

Szükségünk lesz még az alábbi fogalomra.

2. definíció. Az A és B síkbeli halmazok *vektorösszege* vagy *Minkowski-összege* azon $A + B$ halmaz, melynek elemei az összes $\vec{a} + \vec{b}$ alakban felírható helyvektorú pontok halmaza, ahol $\vec{a}$ egy A -beli, és $\vec{b}$ egy B -beli pont helyvektora. Ha $\lambda \in \mathbb{R}$, akkor a λA halmaz azon pontok összessége, melyek helyvektorai felírhatók $\lambda \vec{a}$ alakban, ahol $\vec{a}$ egy A -beli pont helyvektora.

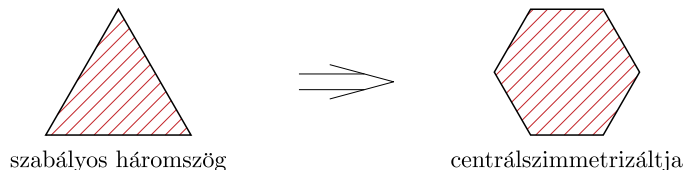
Pongyolán fogalmazva, ha azonosnak tekintenénk a pontokat és a helyvektoraikat, akkor $A + B$ az összes A -beli pont és az összes B -beli pont összege, minden lehetséges párosításban. Így pl. két szakasz vektorösszege egy velük párhuzamos szakasz, ha párhuzamosak, ellenkező esetben pedig egy paralelogramma.

3. definíció. A K konvex síkidom *centráliszimmetrizáltjának* az

$$\frac{1}{2}(K + (-K)) = \frac{1}{2}(K - K)$$

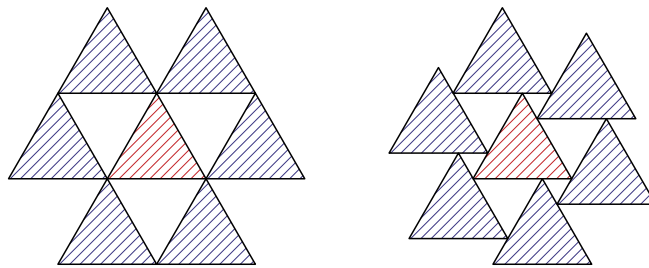
halmazt nevezzük.

Könnyen látható, hogy minden konvex síkidom centráliszimmetrizáltja egy origóra szimmetrikus konvex síkidom.



Írásunk fő tárgya a Hugo Hadwigertől [6] származó alábbi fogalom, mely hasonlóan értelmezhető konvex testekre, illetve általában (topologikus) lemezekre.

4. definíció. Egy K konvex síkidom *eltolt érintési száma*/*csókszám*/*Hadwiger-száma* azon eltoltjainak maximális száma, melyek az eredeti alakzatot érintik, és nincs közös belső pontjuk (nem fedik át egymást). Jele: $H(K)$.



Háromszög Hadwiger-száma

A cikkben ismertett fő eredmény az alábbi tétel [6].

1. tétel (Hadwiger, 1957). *Minden K konvex síkidom Hadwiger-számára igaz az alábbi egyenlőtlenség: $6 \leq H(K) \leq 8$.*

Az előbbi példában láthattuk, hogy háromszöget hat eltoltjával tudunk érinteni. Meggondolható az is, hogy paralelogramma esetében nyolc eltoltját is köré tudjuk pakolni. A következő részben Hadwiger tételét igazoljuk.

2. Hadwiger tételének bizonyítása

Legyen K egy konvex síkidom, és jelölje K eltoltját az $\vec{x}$ vektorral $\vec{x} + K$. Az első eszköz, amihez a bizonyításhoz szükségünk lesz, Minkowski [10] egy eredménye.

1. lemma (Minkowski, 1904). *Legyen K centrálszimmetrizáltja M . Ekkor tetszőleges $\vec{x}$ és $\vec{y}$ vektorokra $\vec{x} + K$ és $\vec{y} + K$ pontosan akkor fednek át/érintik egymást/nincs közös pontjuk, ha $\vec{x} + M$ és $\vec{y} + M$ átfednek/érintik egymást/nincs közös pontjuk.*

Bizonyítás. Először belátjuk, hogy $\vec{x} + K$ és $\vec{y} + K$ pontosan akkor metszi egymást, ha $\vec{x} + M$ és $\vec{y} + M$ is. Vegyük észre, hogy az alábbi tulajdonságok ekvivalensek.

- $(\vec{x} + M) \cap (\vec{y} + M) \neq \emptyset$.
- Léteznek $P'_x, P'_y, P''_x, P''_y \in K$ pontok, melyek helyvektoraira

$$\vec{x} + \frac{1}{2}(\vec{p}'_x - \vec{p}''_x) = \vec{y} + \frac{1}{2}(\vec{p}'_y - \vec{p}''_y).$$

- Léteznek $P'_x, P'_y, P''_x, P''_y \in K$ pontok, melyek helyvektoraira

$$\vec{x} + \frac{1}{2}(\vec{p}'_x + \vec{p}''_y) = \vec{y} + \frac{1}{2}(\vec{p}'_y + \vec{p}''_x).$$

- léteznek $P_x, P_y \in K$ pontok, melyekre $\vec{x} + \vec{p}_x = \vec{y} + \vec{p}_y$.
- $(\vec{x} + K) \cap (\vec{y} + K) \neq \emptyset$.

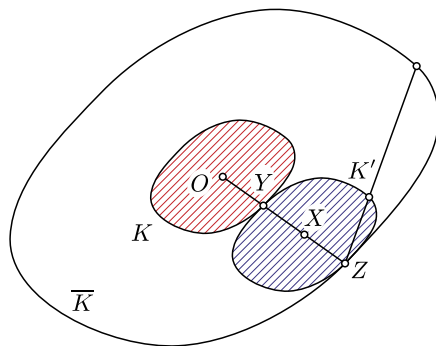
Hasonló ekvivalencia igazolható, ha a K és M halmazok helyett K és M belsejét írunk. Ebből az állítás viszont már következik. $\square$

Vegyük észre, hogy a lemma alapján tetszőleges K konvex síkidom és M centrálszimmetrizáltjának Hadwiger-száma egyenlő. Így Hadwiger tételét elég középpontosan szimmetrikus konvex síkidomokra igazolni. Az egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy K középpontja az O origó.

Első állítás: $H(K) \leq 8$.

Legyen K' a K olyan eltoltja, amely érinti K -t; jelölje a középpontját X . Legyen Y az OX szakasz felezőpontja. Belátjuk, hogy Y közös pontja K -nak és K' -nek.

Mivel K és K' érintik egymást, van egy közös P pontjuk. De K szimmetrikus O -ra, így K és K' helyet cserél, ha Y -ra tükrözzük őket. Tehát P -nek az Y -ra vett P' tükörképe is közös pont. De K és K' konvex, így a PP' szakasz minden pontja közös pont, azaz Y is. Hosszabbítsuk meg most az OX szakaszt X irányában, míg metszi K' határát, és jelöljük a kapott metszéspontot Z -vel. Minthogy K' szimmetrikus X -re, $\overline{OY} = \overline{YX} = \overline{XZ} = \frac{1}{3}\overline{OZ}$. Jelölje K' -nek a Z -ből háromszorosára nagyított képét $\bar{K}$. Mivel K' konvex, $K' \subset \bar{K}$. Másrészt $\bar{K}$ középpontja O , így $\bar{K}$ a K -nak az O -ból háromszorosára nagyított képe. Tehát beláttuk, hogy K minden K -t érintő eltoltja benne van K -nak az O pontból háromszorosára nagyított képében.



Könnyű meggondolni, hogy a nagyított kép területe $T(\bar{K}) = 3^2 T(K) = 9T(K)$. Ha K -t $n = H(K)$ darab eltoltja érinti úgy, hogy nem fednek át, akkor $\bar{K}$ tartalmazza K $(n+1)$ darab eltoltját, melyek nem fednek át. Ezek összterülete $(n+1)T(K)$. Tehát $(n+1)T(K) \leq 9T(K)$, amiből $n \leq 8$.

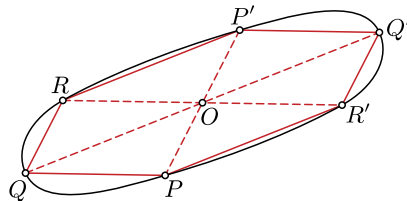
Második állítás: $H(K) \geq 6$.

A bizonyításhoz az alábbi definícióra lesz szükségünk.

5. definíció. Egy középpontosan szimmetrikus hatszög *affin-szabályos*, ha a három, szemközti csúcsait összekötő átlója hat egybevágó háromszögre bontja.

Ennek megfelelően affin-szabályos hatszöget gyártani is tudunk: ha egy tetszőleges háromszöget tükrözzünk valamelyik oldalfelező pontjára, majd folytatjuk a tükrözést úgy, hogy az eredeti háromszög valamelyik csúcsa mindegyik tükrösképhez hozzátartozzon, öt tükrözés után egy affin-szabályos hatszöget kapunk.

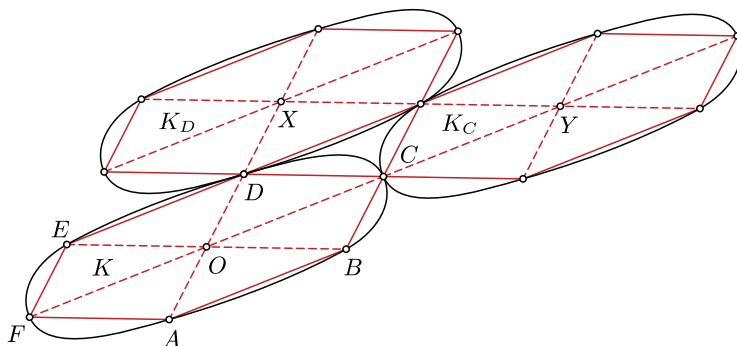
Először belátjuk, hogy K tetszőleges P határpontjához található olyan K -ba írt affin-szabályos hatszög, melynek P az egyik csúcsa. Legyen P' a P -nek az O -ra vett tükrösképe. Ekkor $\overline{OP} = \overline{OP'}$. Toljuk el P és P' egyenesét valamelyik irányban párhuzamosan úgy, hogy az eltolt K -t egy $\frac{1}{2}\overline{PP'}$ hosszú szakaszban metszi. Ezen szakasz végpontjait Q -val és R -rel jelöljük oly módon, hogy K határán körbemenve P, Q, R és P' ebben a sorrendben következnek. Tükrözzük a Q és R pontokat O -ra. Az így kapott, K határán levő pontokat jelöljük Q' -vel és R' -vel.



Megmutatjuk, hogy a $PQR P'Q'R'$ hatszög affin szabályos. Valóban, a hatszög szemközti csúcsait összekötő átlók az O pontban metszik egymást. Másrészt a tükrözés tulajdonságai miatt a szemközti háromszögek egybevágók. Mivel $\overline{OP} = \overline{OR}$ és $RQO \triangleleft = QOP \triangleleft$, így az $OQR \triangle$ és az $OPQ \triangle$ egybevágó. Hasonlóan látható be a többi háromszög egybevágósága is.

Most megkonstruáljuk K -nak hat eltoltját, melyek nem fednek át, de K -t érintik. Legyen $ABCDEF$ egy K -ba írt affin-szabályos hatszög. Toljuk el K -t az $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{BE}, \overrightarrow{EB}, \overrightarrow{CF}, \overrightarrow{FC}$ vektorokkal. Belátjuk, hogy a hat eltolt érinti K -t és nem fednek át, melyből az igazolni kívánt egyenlőtlenség már következik.

Tekintsük most K -t, és például az $\overrightarrow{AD}$ vektorral vett K_D eltoltját. Legyen az e egyenes K egy érintője a D pontban. Vegyük észre, hogy D közös pontja K -nak és K_D -nek. Mivel a két síkidom középpontosan szimmetrikus, így őket D -re tükrözve a középpontjaik és ők is helyet cserélnek. Minthogy e helyben marad a tükrözés során, ezért e elválasztja K -t és K_D -t. De D közös pontja a két síkidomnak, így K és K_D érintik egymást. Ugyanezzel a gondolatmenettel igazolható, hogy mind a hat eltolt érinti K -t.



Legyen most K eltoltja $\overrightarrow{FC}$ -vel K_C . Legyen K_D középpontja X és K_C középpontja Y . Könnyen látható, hogy $\overrightarrow{FC} - \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{OC} - 2\overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{EB}$, és $\overrightarrow{FC} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OY} - \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{XY}$. Így K_C a K_D eltoltja az $\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{EB}$ vektorral. Minthogy az előző bekezdés gondolatmenete alapján K és $\overrightarrow{EB}$ -vel vett eltoltja érintik egymást, így K_C és K_D is érinti egymást. Hasonlóan látható be, hogy minden eltolt érinti a két szomszédját.

Ezzel a tételt bebizonyítottuk. $\square$

3. További eredmények

Hadwiger eredményét Branko Grünbaum [5] fejlesztette tovább az alábbi formában.

2. tétel (Grünbaum, 1961). *Legyen K egy konvex síkidom.*

- (1) *Ha K egy parallelogramma, $H(K) = 8$.*
- (2) *Ha K nem parallelogramma, $H(K) = 6$.*

De mi a helyzet, ha K nem feltétlenül konvex? Włodzimierz és Krystyna Kuperberg, valamint Bezdek András [2] fogalmazta meg a következő kérdést, illetve sejtést.

1. kérdés (Bezdek–Kuperberg–Kuperberg, 1995). *Igaz-e, hogy tetszőleges lemez Hadwiger-száma legfeljebb 8? Ha nem, van olyan szám, melyre 8-at kicserélve igaz marad az állítás?*

1. sejtés (Bezdek–Kuperberg–Kuperberg, 1995). *Tetszőleges csillagszerű lemez Hadwiger-száma legfeljebb 8.*

A fenti kérdésre Gottfried Cheong és Mira Lee [4] adott választ 2007-ben, akik megmutatták, hogy tetszőleges n pozitív egész esetén található olyan K_n lemez, melyre $H(K_n) \geq n$. A sejtést érintő első eredmény Bezdek Andrásnak kötetlik [1], aki 1997-ben megmutatta, hogy ha S egy csillagszerű lemez, akkor $H(S) \leq 75$. Lángi [8] 2009-ben igazolta, hogy ha S középpontosan szimmetrikus, akkor $H(S) \leq 12$. A módszerét alkalmazva született meg 2011-ben a $H(S) \leq 35$ becslés tetszőleges S csillagszerű lemez esetén [9]. Ezen erőfeszítések ellenére a Bezdek-Kuperberg-Kuperberg sejtés még ma is nyitott.

Természetesen konvex síkidomok helyett vizsgálhatunk konvex testeket is. A síkidomok Hadwiger-számára vonatkozó felső becslés átültethető konvex testekre is. Ez alapján Hadwiger belátta, hogy minden n -dimenziós K konvex testre $H(K) \leq 3^n - 1$, azaz speciálisan háromdimenziós testek esetén $H(K) \leq 26$. Azt a régóta ismert alsó becslést, hogy n -dimenziós konvex testek Hadwiger száma legalább $n(n+1)$, Talata István [11] javította azzal 1998-ban, hogy igazolta, hogy létezik olyan $a > 1$ konstans, hogy minden n -dimenziós K konvex testre $H(K) \geq a^n$.

Minthogy Minkowski lemmája alapján minden konvex test Hadwiger-száma megegyezik a centrálszimmetrizáltjának Hadwiger számával, felvetődhet bennünk, hogy igaz-e, hogy minden konvex test Hadwiger-száma páros. Ezt a kérdést, sejtés formájában, Grünbaum fogalmazta meg 1961-ben. A sejtést Talata István, majd később Joós Antal [7] cáfolta: olyan 3-dimenziós konvex testet konstruáltak, melynek Hadwiger-száma 17, illetve 15. Talata István igazolta azt is, hogy minden 12 és 26 közti páros szám előáll, mint egy 3-dimenziós konvex test Hadwiger-száma. Poór Attila és Talata István bizonyította, hogy ha $h(n)$ jelöli a Hadwiger-számok halmazának minimumát az n -dimenziós konvex testekre nézve, akkor tetszőleges $h(n) \leq m \leq 3^n - 2$ esetén $H(K) = m$ vagy $H(K) = m + 1$ alkalmas K n -dimenziós konvex testre.

Jelenleg is számos Hadwiger-számokkal kapcsolatos kérdés nyitott. Ezekről az érdeklődő olvasó Brass, Moser és Pach könyvéből [3] tájékozódhat.

Hivatkozások

- [1] A. Bezdek, *On the Hadwiger number of a starlike disk*, in: Intuitive Geometry (Budapest 1995), Bolyai Soc. Math. Studies, **6** (1997), 237–245.
- [2] A. Bezdek, K. Kuperberg and W. Kuperberg, *Mutually contiguous translates of a plane disk*, Duke Math. J., **78** (1995), 19–31.
- [3] P. Brass, W. Moser and J. Pach, *Research Problems in Discrete Geometry*, Springer, New York, 2005.
- [4] O. Cheong and M. Lee, *The Hadwiger number of Jordan regions is unbounded*, Discrete Comput. Geom., **37** (2007), 497–501.
- [5] B. Grünbaum, *On a conjecture of Hadwiger*, Pacific J. Math., **11** (1961), 215–219.
- [6] H. Hadwiger, *Über Treffanzahlen bei translationsgleichen Eikörpern*, Arch. Math., **8** (1957), 212–213.
- [7] A. Joós, *On a convex body with odd Hadwiger number*, Acta Math. Hungar., **119** (2008), 307–321.

- [8] Z. Lángi, *On the Hadwiger numbers of centrally symmetric starlike disks*, Beiträge Algebra Geom., **50** (2009), 249–257.
- [9] Z. Lángi, *On the Hadwiger numbers of starlike disks*, European J. Comb., **32** (2011), 1203–1211.
- [10] H. Minkowski, *Dichteste gitterförmige Lagerung kongruenter Körper*, Nachrichten Ges. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Klasse (1904), 311–355.
- [11] I. Talata, *Exponential lower bound for the translative kissing numbers of d -dimensional convex bodies*, Discrete Comput. Geom., **19** (1998), 447–455.