

I. rész

1. Egy 18 fős csoportban a fizika tantárgy átlaga két tizedesre kerekítve 3,72 volt. Tudjuk, hogy senki sem bukott meg.

a) Legfeljebb hányan kaphattak kettest?

b) Biztos-e, hogy volt valakinek ötöse?

c) Az osztály másik csoportjába 16 diák jár, akik fizika átlaga 4,12 volt. Mekkora az osztály átlaga fizikából? (13 pont)

Megoldás. a) Határozzuk meg a kapott jegyek összegét. Tudjuk, hogy az átlag két tizedesre van kerekítve, így legalább 3,715 kell hogy legyen, és kisebb, mint 3,725. Vagyis az osztályzatok összege, amit jelöljünk X -szel, így kapható meg:

$$\begin{aligned} 3,715 \cdot 18 &\leq X \leq 3,725 \cdot 18, \\ 66,87 &\leq X \leq 67,05. \end{aligned}$$

Az X értéke csak egész szám lehet, így $X = 67$.

Jelöljük az egyes osztályzatok számát sorra az O_1, O_2, O_3, O_4, O_5 szimbólumokkal. Mivel senki sem bukott meg, így $O_1 = 0$. Keressük a kettesek számának lehetséges maximumát.

Ha O_2 db kettes van az osztályzatok között, akkor a maradék $(18 - O_2)$ db osztályzat összege maximum $67 - (2 \cdot O_2)$ lehet. Azonban ezen osztályzatok átlaga nem lehet nagyobb 5-nél:

$$\frac{67 - 2 \cdot O_2}{18 - O_2} \leq 5.$$

Rendezve: $3 \cdot O_2 \leq 23$, amiből $O_2 \leq 7,6\bar{6}$ adódik.

Tehát a kettes osztályzatok maximális száma 7 lehet. Ilyen eset lehetséges is: ha 7 db 2-es, 2 db 4-es és 9 db 5-ös osztályzat van.

b) Keressünk olyan példát, ha lehetséges, ahol nincs az osztályzatok között ötös és minden, a feladatban szereplő feltételnek megfelel.

Legyen tehát $O_5 = 0$. Az osztály 3,72-es átlagát próbáljuk meg csak 3-as és 4-es osztályzatok segítségével elérni. A felírható egyenletrendszer a következő:

$$\begin{aligned} (1) \quad &O_3 \cdot 3 + O_4 \cdot 4 = 67, \\ (2) \quad &O_3 + O_4 = 18. \end{aligned}$$

Szorozzuk meg a (2) egyenletet 3-al és a kapott egyenletet vonjuk ki az (1) egyenletből: $O_4 = 13$. Behelyettesítve a (2) egyenletbe, kapjuk, hogy $O_3 = 5$.

Nem biztos, hogy van ötös osztályzat, mert ha 13 db 4-es és 5 db 3-as jegyet kaptak a diákok a csoportban, akkor is 3,72 lesz az átlaguk.

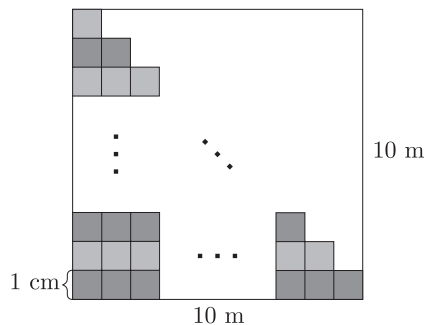
c)

$$\frac{18 \cdot 3,72 + 16 \cdot 4,12}{18 + 16} = 3,908.$$

Az osztály fizika átlaga: 3,91.

2. Egy irodaház egyik oldalfalának díszítésére pályázatot írtak ki. Az oldalfal alakja 10 m oldalhosszúságú négyzet.

A győztes pályázó 1 cm oldalhosszúságú, négyzet alakú, piros, illetve kék színű kerámia lapocskákból rakott ki hézagmentesen egy mintát az ábra szerint úgy, hogy a talaj szintjén kezdődő legalsó sort teljesen kitöltötte a lapocskákkal. Ha felfelé haladunk, minden egyes rákövetkező sorba eggyel kevesebb lapocskaa került. Minden sorba csak azonos színű lapocskák kerültek, és az egymással érintkező sorok különböző színűek voltak.



Vannak-e ennek a kerámia mintának olyan, legalább 10 sormagasságú részei, részmintái, melyek közvetlenül egymás alatt lévő, teljes sorokból állnak, a bennük lévő lapocskák száma 2016, valamint az alsó és felső sora azonos színű? Ha igen, adjuk meg, hogy felülről számítva hányadik sornál kezdődnek, és hány sor tartozik hozzájuk. (11 pont)

Megoldás. A feladat megfogalmazható úgy is, hogy az 1 és 1000 között lévő egészek közül (megengedhető az 1 és az 1000 is) kiválasztható-e páratlan sok, egymást közvetlenül követő szám úgy, hogy az összegük 2016 legyen. Jelöljük a legkisebb számot z -vel (felülről számolva ettől a sortól indulunk, ez a részminta legrövidebb sorának a hossza), az elemek számát pedig k -val (ez a részmintában a sorok száma, a sormagasság). (A feltételekből: $z, k \in \mathbb{Z}$, $1 \leq z, k \leq 1000$ és k páratlan.)

A keresett összeg a bevezetett jelölésekkel a következő:

$$z + (z + 1) + (z + 2) + \dots + (z + k - 3) + (z + k - 2) + (z + k - 1) = 2016.$$

A zárójelek felbontása és az összegzések után (felhasználva a számtani sorozat összegképletét is) a következő kétismeretlenes egyenletet kell megoldani:

$$zk + \frac{k}{2}(k - 1) = 2016.$$

Az egyenlet mindkét oldalát 2-vel szorozva, majd a bal oldalt szorzattá alakítva a következőt kapjuk:

$$k(2z + k - 1) = 4032.$$

Mivel $4032 = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 7$, és a feltételek miatt a szorzat első tényezője biztosan páratlan, a második tényezője biztosan páros, így a tényezők értékeire a következő lehetőségek adódnak:

k	$2z + k - 1$
63	64
21	192
9	448
7	576
3	1344
1	4032

A „legalább 10 sormagasságú részei” miatt csak az első két sorhoz tartozó egyenletrendszereket kell megoldani. A következő megoldásokat kapjuk:

k	z
63	1
21	86

Így összesen két rész, részminta felel meg a feltételeknek:

1. Felülről az 1. sortól kezdődik, és 63, közvetlen egymás alatt lévő sort tartalmaz.
2. Felülről a 86. sortól kezdődik, és 21, közvetlen egymás alatt lévő sort tartalmaz.

3. Az ABC háromszög két csúcsának koordinátái: $A(3; -2)$ és $B(3; 6)$. Az A csúcsnál lévő α szög felezője a BC oldalt az $F_\alpha \left(\frac{8 + 3\sqrt{3}}{\sqrt{3}}; 6 \right)$ pontban metszi.

Határozzuk meg a C csúcs koordinátáinak pontos értékét.

b) Legyen az ABP háromszög olyan, hogy az A és B csúcs egyezzen meg az a)-beli A és B ponttal, és oldalai mérőszámának négyzetösszege egyezzen meg területének négyzetével.

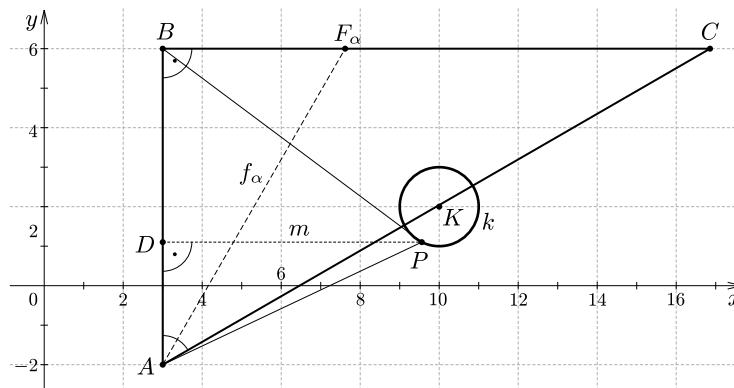
Határozzuk meg a feltételnek megfelelő P pontok mértani helyét, ha tudjuk, hogy a P pont abszcisszája nagyobb a másik két csúcs abszcisszájánál. (14 pont)

Megoldás. a) Az A és a B pont első koordinátája megegyezik, ezért AB párhuzamos az y tengellyel. Az F_α és a B pont ordinátája szintén megegyezik, ezért BC párhuzamos az x tengellyel, így a B csúcsnál derékszög van.

Az AB oldal hossza 8, a BF_α hossza $\frac{8}{\sqrt{3}}$. Az ABF_α derékszögű háromszögben lévő $\frac{\alpha}{2}$ szögre:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{8}{\sqrt{3}}}{8} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

így $\alpha = 60^\circ$ és az ABC_Δ egy szabályos háromszög fele, tehát $AC = 16$. A szögfelező tétel miatt $\frac{F_\alpha C}{F_\alpha B} = \frac{16}{8} = 2$, amiből $F_\alpha C = \frac{16}{\sqrt{3}}$, és így $C \left(3 + \frac{24}{\sqrt{3}}; 6 \right)$ következik.



b) Legyen $P(x; y)$. A keresett P pont az AB egyenes jobb oldalán van ($x > 3$). Az AB oldalhoz tartozó magasság $x - 3$. A háromszög területe: $T = \frac{8(x-3)}{2}$. A feltételnek megfelelően: $7 \cdot T = AB^2 + BP^2 + AP^2$. Ezekből felírható:

$$64 + (x-3)^2 + (y-6)^2 + (x-3)^2 + (y+2)^2 = 28(x-3).$$

A műveleteket elvégezve, majd az egyenletet rendezve: $(x-10)^2 + (y-2)^2 = 1$. A kapott egyenlet egy $(10; 2)$ középpontú, 1 egység sugarú kör egyenlete. A kör minden pontja megfelel a feltételeknek, így ez a kör a keresett mértani hely.

4. a) Legyen az $\{a_n\}$ sorozat első tagja 1, a második tagja pedig 2. A sorozat elemeit a harmadik tagtól kezdve a következő képzési szabály (rekurzió) adja meg:

$$a_{n+2} := \frac{a_{n+1} + 1}{a_n}, \quad \text{ha } n \geq 1.$$

Határozzuk meg a számsorozat 2016. elemét.

b) A Heuréka Alapítvány támogatni szeretné a matematikából tehetséges diákokat. Ennek érdekében a támogatók által adományozott pénzt 2016. január 1-jén évi 3,2%-os, állandó kamatozású folyószámlán helyezte el. A pénzügyintézet minden év utolsó napján írja jóvá a kamatokat, az alapítvány pedig az első év lejártától kezdve minden év január 1-jén utalja a támogatást a fiataloknak. Az évente nyújtott támogatás összege mindig az első év végén kamatként kapott összeg két és félszerese.

Mikor tud az alapítvány utoljára a szabályzatában lefektetett módon teljes támogatást fizetni, ha nincsenek egyéb bevételei és kiadásai sem? (13 pont)

Megoldás. a) Számítsunk ki néhány tagot:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1, & a_2 &= 2, & a_3 &= \frac{a_2 + 1}{a_1} = \frac{2 + 1}{1} = 3, & a_4 &= \frac{a_3 + 1}{a_2} = \frac{3 + 1}{2} = 2, \\ a_5 &= \frac{a_4 + 1}{a_3} = \frac{2 + 1}{3} = 1, & a_6 &= \frac{a_5 + 1}{a_4} = \frac{1 + 1}{2} = 1, & a_7 &= \frac{a_6 + 1}{a_5} = \frac{1 + 1}{1} = 2, \\ a_8 &= \frac{a_7 + 1}{a_6} = \frac{2 + 1}{1} = 3, & a_9 &= \frac{a_8 + 1}{a_7} = \frac{3 + 1}{2} = 2, & a_{10} &= \frac{a_9 + 1}{a_8} = \frac{2 + 1}{3} = 1, \dots \end{aligned}$$

Mivel $a_6 = a_1$, $a_7 = a_2$, $a_8 = a_3$, $a_9 = a_4$ és $a_{10} = a_5$, így az értékek periodikusak, hiszen a műveletek (a rekurzió miatt) 5 tagonként ugyanazok lesznek ugyanazokkal a számokkal, a periódus hossza így 5.

A 2016-nak az 5-ös maradéka 1, tehát a 2016. tag 1.

b) Jelölések:

alaptőke: a_0 ; kamat: $p = 3,2\%/év$; kivét minden évben: $0,08a_0$.

Az n . kifizetés utáni tőke:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1,032a_0 - 0,08a_0, \\ a_2 &= (1,032a_0 - 0,08a_0) \cdot 1,032 - 0,08a_0 = 1,032^2a_0 - 0,08 \cdot 1,032a_0 - 0,08a_0, \\ &\dots \\ a_n &= 1,032^n a_0 - 1,032^{n-1} \cdot 0,08a_0 - 1,032^{n-2} \cdot 0,08a_0 - \dots - 0,08a_0 = \\ &= a_0 \left[1,032^n - 0,08(1,032^{n-1} + \dots + 1) \right] = a_0 \left(1,032^n - 0,08 \cdot \frac{1,032^n - 1}{0,032} \right) = 0. \end{aligned}$$

Mivel $a_0 \neq 0$, ezért ebből

$$1,032^n - \frac{0,08}{0,032} \cdot 1,032^n + \frac{0,08}{0,032} = 0, \quad \text{majd } 1,032^n = 1 \frac{2}{3}$$

következik. Ebből pedig

$$n = \frac{\lg\left(1\frac{2}{3}\right)}{\lg 1,032} \approx 16,217.$$

Ennek megfelelően az alapítvány 16-szor tud teljes támogatást fizetni, vagyis utoljára 2032. január 1-jén.

II. rész

5. a) Egy hegység öt leglátogatottabb csúcsán van egy-egy kilátó. Minden kilátóból bármelyik kilátóba közvetlenül eljuthatunk libegővel vagy gyalog, de mindig csak az egyik módon. András, a helyszínt nem ismerve azt állította, hogy lehet olyan, mindegyik kilátót érintő kirándulást szervezni, amelyen csak az egyik módon közlekedünk.

Igaza van Andrásnak?

b) Az A városból 60 km/h sebességgel indul el egy személyvonat a B városba. A személyvonat után indul valamivel később egy gyorsvonat ugyanezen az útvonalon, másfélszeres sebességgel. A gyorsvonat így a személyvonatot éppen a B városban érne utol. Sajnos a személyvonat műszaki hiba miatt útjának kétharmad részétől csak az eredeti sebességének felével tud haladni, így a két vonat már a B város előtt 45 km -re lévő C város pályaudvarán találkozik.

Milyen messze van C város az A várostól, ha a vonatok sebességét az egyes szakaszokon állandónak tekintjük? (16 pont)

Megoldás. a) Legyenek a gráf csúcsai a kilátók, élei pedig az útvonalak. Színezzük ki az éleket. A „libegős” él fekete, a „gyalogos” él pedig zöld legyen. A szöveg szerint bármely két kilátó össze van kötve, ezért egy teljes gráfot kapunk. Tehát a fekete élek által meghatározott részgráfnak komplementere a zöld élek által meghatározott részgráf.

Mivel egy gráf és komplementere közül legalább az egyik összefüggő, ezért Andrásnak igaza van.

b) Jelölések: $v_{sz} = 60 \text{ km/h}$; $v_{gy} = 1,5v_{sz} = 90 \text{ km/h}$; x : az A és B város távolsága.

Tervezett idő a teljes útra: $t_{sz} = \frac{x}{60}$ óra; $t_{gy} = \frac{x}{90}$ óra; $\Delta t = \frac{x}{60} - \frac{x}{90} = \frac{x}{180}$ óra (ennyivel később indul a gyorsvonat). A tényleges idő az A és C városok között:

$$t'_{sz} = \frac{\frac{2}{3}x}{60} + \frac{\frac{1}{3}x - 45}{30} = \frac{2x - 135}{90} \text{ óra}; \quad t'_{gy} = \frac{x - 45}{90} \text{ óra};$$
$$\Delta t' = \frac{2x - 135}{90} - \frac{x - 45}{90} = \frac{x - 90}{90} \text{ óra}.$$

A kétféleképpen számolt időkülönbség megegyezik:

$$\frac{x}{180} = \frac{x - 90}{90}.$$

Ebből $x = 180 \text{ km}$. Tehát az A város a B várostól 180 km -re, a C várostól 135 km -re van.

6. a) Oldjuk meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán:

$$\sqrt{x + 3 - 4\sqrt{x-1}} + \sqrt{24 + x - 10\sqrt{x-1}} = 5.$$

b) Mely valós számok esetén lesz a $\sin 2x$ mértani közepe a $\sin x$ -nek és a $\cos x$ -nek, ha mindhárom kifejezés nem-negatív értékeket vesz fel? (16 pont)

Megoldás. a) A négyzetgyökvonás definíciója miatt: $x \geq 1$. A gyökök alatti kifejezéseket átalakítva az egyenlet:

$$\sqrt{(\sqrt{x-1} - 2)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-1} - 5)^2} = 5.$$

Ebből:

$$|\sqrt{x-1} - 2| + |\sqrt{x-1} - 5| = 5.$$

1. Ha $x \geq 26$, akkor az egyenlet $\sqrt{x-1} - 2 + \sqrt{x-1} - 5 = 5$, amelyből $2\sqrt{x-1} = 12$, és így a megoldása $x = 37$.

2. Ha $x < 5$, akkor az egyenlet $-\sqrt{x-1} + 2 - \sqrt{x-1} + 5 = 5$, amelyből $2\sqrt{x-1} = 2$, aminek a megoldása $x = 2$.

3. Ha $5 \leq x < 26$, akkor az egyenlet $\sqrt{x-1} - 2 - \sqrt{x-1} + 5 = 5$, amelyből a $3 = 5$ ellentmondáshoz jutunk.

A 37 és a 2 eleget tesz az eredeti egyenletnek.

b) A mértani közép definíciója és a feltételek miatt:

$$\sin 2x = \sqrt{\sin x \cdot \cos x}.$$

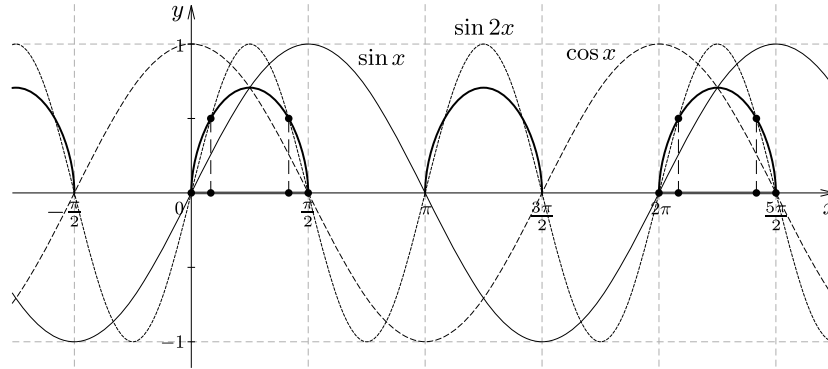
A mértani közép és a négyzetgyök miatt: $\sin x \geq 0$, $\cos x \geq 0$ és $\sin 2x \geq 0$. Ezek a feltételek akkor teljesülnek, ha:

$$2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Vezessünk be új ismeretlent: $a := \sqrt{\sin x \cdot \cos x}$. Ekkor az egyenlet a kétszeres szög szinuszára vonatkozó összefüggés felhasználásával a következő lesz:

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x = 2(\sqrt{\sin x \cdot \cos x})^2 = 2a^2, \quad 2a^2 = a.$$

0-ra redukálás után kiemeléssel szorzattá alakítva: $a \cdot (2a - 1) = 0$.



1. eset: $a = 0$, $\sqrt{\sin x \cdot \cos x} = 0$. Ekkor $\sin x \cos x = 0$, vagyis $\sin 2x = 0$. Ebből

$$(*) \quad 2x = l\pi, \quad l \in \mathbb{Z}, \quad \text{vagyis} \quad x = l\frac{\pi}{2} \quad (l \in \mathbb{Z}).$$

2. eset: $a = \frac{1}{2}$, $\sqrt{\sin x \cdot \cos x} = \frac{1}{2}$, vagyis $\sin x \cos x = \frac{1}{4}$, és így $\sin 2x = \frac{1}{2}$. Ebből

$$(**) \quad 2x = \frac{\pi}{6} + 2n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad x = \frac{\pi}{12} + n\pi \quad (n \in \mathbb{Z}),$$

vagy

$$(***) \quad 2x = \frac{5\pi}{6} + 2m\pi, \quad m \in \mathbb{Z}, \quad x = \frac{5\pi}{12} + m\pi \quad (m \in \mathbb{Z}).$$

Az értelmezési tartományt figyelembe véve, az (*), (**) és (***) szögek közül azok, amelyekre a $\sin 2x$ a $\sin x$ -nek és a $\cos x$ -nek a mértani közepe, a következők:

$$\begin{aligned} x_1 &= 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}); & x_2 &= \frac{\pi}{2} + 2l\pi \quad (l \in \mathbb{Z}), \\ x_3 &= \frac{\pi}{12} + 2n\pi \quad (n \in \mathbb{Z}), & x_4 &= \frac{5\pi}{12} + 2m\pi \quad (m \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

7. Egy kistermelő földjén nagyon sok görögdinnye termett. Kiválasztott közülük 33 db egyforma, 28 cm átmérőjű gömb alakú termést, és a közeli piacra vitte értékesíteni.

a) A termelő az utánfutójában egy rétegben szeretne volna elhelyezni a dinnyéket. Bármilyen szorosan is pakolta, nem sikerült. Hány db dinnyét kellett a gépkocsi hátsó ülésére betenni, ha az utánfutóra a lehető legtöbb dinnyét tette egy rétegben, és az utánfutó belső méretei: 200 cm $\times$ 130 cm?

b) A piacon 85 cm magasak a standok, ahová az árusok kipakolhatják az árut. A gazda kiszámolta, hogy egymás mellé három olyan „piramist” (3. ábra) tud építeni a dinnyékből, amelyknél az alsó szintre hét (1. ábra), a második szintre három (2. ábra), a harmadik szintre pedig egy dinnyét (3. ábra) helyez szorosan egymás mellé, illetve egymásra. Amikor a vevőkkel tárgyal a dinnyehalmok mögül, szereti, ha semmi sem zavarja a beszélgetést és a fizetést. Ezért nem akarta azt, hogy a dinnyékből épített bármelyik rakás csúcsa a földtől számítva 150 cm-nél magasabban legyen. Teljesült-e ez a kívánság a fent említett elrendezés esetén? (16 pont)



1. ábra

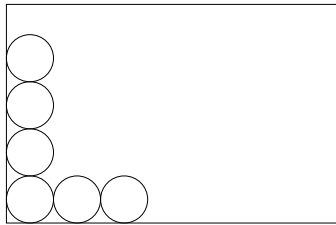


2. ábra

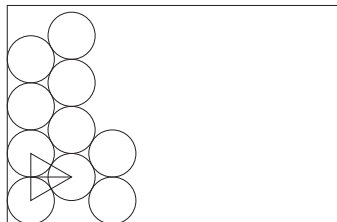


3. ábra

Megoldás. Ha a termelő a 4. ábrán látható módon helyezi el a dinnyéket, $7 \cdot 4$ db fér el $196 \text{ cm} \times 112 \text{ cm}$ -es területen. Így 5 dinnyét kellene betenni a hátsó ülésre. Azonban a 130 cm széles utánfutó faláig 18 cm távolság marad, ami lehetővé teszi az 5. ábra szerinti elhelyezést is. Felvetődik a kérdés, hogy így befér-e $8 \cdot 4$ db dinnye is.



4. ábra

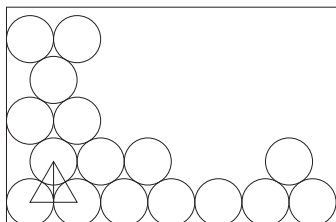


5. ábra

A nyolc oszlopban elhelyezett gömbök $2r + 7m \approx 197,74 \text{ cm}$ hosszúságú és $9r = 126 \text{ cm}$ szélességű területet foglalnak el, ahol r a dinnyék sugara, m pedig az 5. ábrán bejelölt $2r$ oldalú szabályos háromszög magassága, azaz $\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 28 \text{ cm}$.

Mivel az utánfutó 2 m hosszú, így ilyen módon elrendezve összesen $8 \cdot 4 = 32$ db dinnye fér bele, azaz egy dinnyét kellene a hátsó ülésre betenni.

A termelő megpróbálkozott a 6. ábrán látható elhelyezéssel is. Az ilyen módon 5 sorban elhelyezett dinnyék $2r + 4m \approx 125 \text{ cm}$ -t foglalnak el az utánfutó szélességéből. A hosszabbik dinnyesor pedig $7 \cdot 2r = 196 \text{ cm}$ -t az utánfutó hosszából. Így összesen $3 \cdot 7 + 2 \cdot 6 = 33$ dinnye fér el, így a hátsó ülés üres marad.



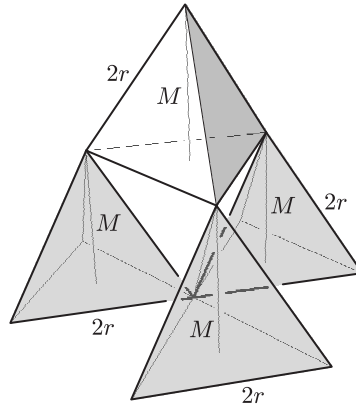
b) Tekintsük a „piramisba” rendezett dinnyék középpontjait. Az első szinten a középpontok egy $2r$ oldalú szabályos hatszög csúcsai, illetve annak középpontja mentén helyezkednek el, az asztal szintjétől r távolságra. A második szinten lévő dinnyék középpontjai egy $2r$ oldalú szabályos háromszöget alkotnak. A csúcsra helyezett egyetlen dinnye középpontjától r távolságra van a halom teteje.

A 7. ábrán látható módon a dinnyék középpontjai $2r$ élhosszúságú szabályos tetraédereket alkotnak. Az első és a második szint, illetve a második és a harmadik szint távolsága ezen tetraéderek magasságával egyezik meg.

Így a „dinnyepiramis” teteje $2r + 2M$ távolságra van az asztal szintjétől, ahol r a gömbök sugara, M a tetraéder magassága.

$$2r + 2M = 2r + 2 \cdot \frac{2r \cdot \sqrt{6}}{3} \approx 73,72 \text{ cm.}$$

Így a stand 85 cm-es magasságát is beszámítva a dinnyehalom teteje a talajtól számítva kb. 158,72 cm magasságra van, ezért nem teljesül a gazda kívánsága.



7. ábra

8. Adott az $f:]-1; 6] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x^2 - 4x + 3| - |x^2 - 6x + 5|$ függvény.

a) Ábrázoljuk az f függvény grafikonját a megadott értelmezési tartományban.

i) Adjuk meg az f függvény értékkészletét.

ii) Határozzuk meg algebrai úton az f zérushelyeit.

b) Határozzuk meg az f függvény grafikonja 4 abszcisszájú pontjába húzható érintő egyenes iránytangensét és egyenletét.

c) Töljük el az $y = 2x^2 - 10x + 8$ függvény grafikonját a $\mathbf{v}(-2, 5; 4, 5)$ vektorral.

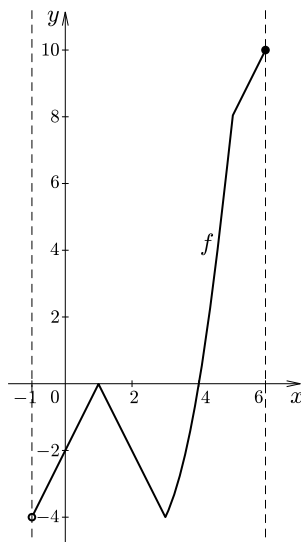
i) Adjuk meg az így kapott függvény hozzárendelési szabályát.

ii) Számítsuk ki az eltolt grafikon és az $y = 4,5$ egyenletű egyenes által bezárt síkrész területét. (16 pont)

Megoldás. Mivel $x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3)$ és $x^2 - 6x + 5 = (x - 1)(x - 5)$, ezért a függvény (az abszolútérték értelmezése alapján) így néz ki:

$$x \rightarrow \begin{cases} 2x - 2, & \text{ha } -1 < x \leq 1; \\ -2x + 2, & \text{ha } 1 < x \leq 3; \\ 2x^2 - 10x + 8, & \text{ha } 3 < x \leq 5; \\ 2x - 2, & \text{ha } 5 < x \leq 6. \end{cases}$$

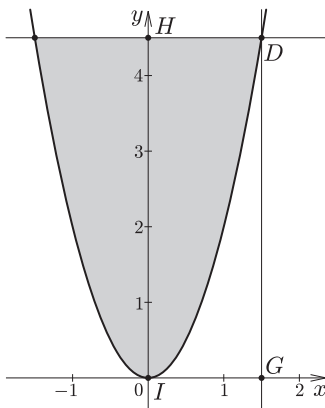
a) Ez alapján a függvény ábrázolható (1. ábra).



1. ábra

- i) Az értékkészlet a fentiek alapján: $R_f =]-4; 10]$.
- ii) Zérushelyek: $x_1 = 1$ és $x_2 = 4$.
- b) Az f grafikonjának $P(4; 0)$ pontjába húzzuk az érintőt, melynek az iránytangensét f' adja. Ebben a pontban $f' = 4x - 10$. Vagyis $x = 4$ helyen a meredekségre $m = 6$ -ot kapunk. Az érintő egyenlete: $y - y_0 = m(x - x_0)$, ami esetünkben $y = 6(x - 4)$.
- i) Az adott vektorral eltolt függvény grafikonjának a hozzárendelési utasítása: $y = 2(x + 2,5)^2 - 10(x + 2,5) + 8 + 4,5$. A zárójelek felbontása és összevonás után: $y = 2x^2$.
- ii) A két függvény grafikonja által bezárt terület szimmetrikus az y tengelyre. Ha kiszámoljuk az I. síknegyedbe eső területet, ekkor a keresett terület ennek éppen a kétszerese (2. ábra).

$$\frac{T}{2} = t_{DHIG} - \int_0^{1,5} 2x^2, \quad \text{amiből} \quad T = 2(6,75 - 2,25) = 9.$$



2. ábra

9. a) A Lutri Lottón a 75-nél nem nagyobb pozitív egész számok közül húznak ki 5-öt úgy, hogy a kihúzott számokat nem teszik vissza, és a húzási sorrend nem számít. Egy szelvénnel akkor lehet nyerni, ha rajta legalább két találatot érték el. Szerencsés Szilárd 10 szelvénnel játszik a Lutri Lottón. Ha a szelvényeket egymástól függetlenül tölti ki, mennyi annak a valószínűsége, hogy

1. nyer;
2. legalább három szelvényen két találatja lesz?

b) Szilárdnak három húga van: Szabina, Szilvia és Szonja. A három lány (Szilárddal együtt) a következő játékot játssza: megkérlik édesanyjukat, hogy mondjon egy – találmomra kiválasztott – háromjegyű számot. Ha az adott számban az egyik számjegy a másik kettő számtani közepe, akkor Szabina, ha az egyik számjegy a másik kettő mértani közepe, akkor Szilvia, ha pedig egyik feltétel sem teljesül, akkor Szonja kap egy cukorkát Szilárdtól.

Igaz-e, hogy Szonja nyeresi esélye több, mint hatszorosa Szabina nyeresi esélyének?

(16 pont)

Megoldás. a) Legyen p_k annak a valószínűsége, hogy Szilárd egy szelvényen pontosan k darab találatot ér el ($k = 0; 1; 2; \dots; 5$). Ekkor

$$p_k = \frac{\binom{5}{k} \cdot \binom{70}{5-k}}{\binom{75}{5}}.$$

Egy szelvény nem nyerő, ha rajta a játékos 0 vagy 1 találatot ér el.

Legyen A az az esemény, hogy Szilárd a 10 szelvény egyikével sem nyer. Figyelembe véve, hogy a szelvényeket egymástól függetlenül tölti ki, $P(A) = (p_0 + p_1)^{10}$.

$$p_0 = \frac{\binom{5}{0} \cdot \binom{70}{5}}{\binom{75}{5}} = \frac{12\,103\,014}{17\,259\,390}, \quad p_1 = \frac{\binom{5}{1} \cdot \binom{70}{4}}{\binom{75}{5}} = \frac{4\,584\,475}{17\,259\,390}, \quad p_0 + p_1 = \frac{16\,687\,489}{17\,259\,390}.$$

Így annak a valószínűsége, hogy Szilárd legalább az egyik szelvénnel nyer:

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - (p_0 + p_1)^{10} = 1 - \left(\frac{16\,687\,489}{17\,259\,390}\right)^{10} \approx 0,286\,07.$$

b) Egy szelvényen a 2 találat valószínűsége:

$$p_2 = \frac{\binom{5}{2} \cdot \binom{70}{3}}{\binom{75}{5}} = \frac{547\,400}{17\,259\,390} \approx 0,031\,72.$$

Legyen q_m annak a valószínűsége, hogy Szilárd pontosan m darab szelvényen ér el 2 találatot ($m = 0; 1; 2; \dots; 10$). Ekkor

$$q_m = \binom{10}{m} \cdot (p_2)^m \cdot (1 - p_2)^{10-m}.$$

Legyen B az az esemény, hogy Szilárdnak legalább három szelvényen két találatja lesz. Ekkor $P(B) = 1 - P(\overline{B})$, ahol $\overline{B}$ azt az eseményt jelöli, hogy Szilárdnak legfeljebb két szelvényen lesz két találatja. Így

$$\begin{aligned} P(\overline{B}) &= q_0 + q_1 + q_2 = \\ &= \binom{10}{0} \cdot (p_2)^0 \cdot (1 - p_2)^{10} + \binom{10}{1} \cdot (p_2)^1 \cdot (1 - p_2)^9 + \binom{10}{2} \cdot (p_2)^2 \cdot (1 - p_2)^8 \approx \\ &\approx 0,724\,45 + 0,237\,32 + 0,034\,99 = 0,996\,76. \end{aligned}$$

Tehát annak a valószínűsége, hogy Szilárdnak legalább három szelvényen két találatja lesz:

$$P(B) = 1 - P(\overline{B}) \approx 1 - 0,996\,76 = 0,003\,24.$$

c) Véletlenszerűen kiválasztott számról van szó, így az összes háromjegyű szám (egyenlő eséllyel) előfordulhat, ezért olyan $\overline{abc}$ alakú számokat kell vizsgálni, ahol $a; b; c \in \mathbb{N}$, $a; b; c \leq 9$, $a \neq 0$. Összesen 900 darab ilyen szám van (100-tól 999-ig).

Figyelembe véve, hogy az $\overline{aaa}$ alakú számok mindkét feltételt teljesítik, ezek vizsgálatával nem foglalkozunk, de mindkét helyre beszámoljuk őket (összesen 9 darab ilyen szám van).

Jelölje C azt az eseményt, hogy az adott számban egyik számjegy a másik kettő számtani közepe.

Ha a két számjegy számtani közepe	A másik két számjegy	Ennyi darab szám képezhető
1	0 és 2	4
2	0 és 4	4
	1 és 3	6
3	0 és 6	4
	1 és 5	6
	2 és 4	6
4	0 és 8	4
	1 és 7	6
	2 és 6	6
	3 és 5	6
5	1 és 9	6
	2 és 8	6
	3 és 7	6
	4 és 6	6
6	3 és 9	6
	4 és 8	6
	5 és 7	6
7	5 és 9	6
	6 és 8	6
8	7 és 9	6

(A 0 és a 9 nem állítható elő két különböző egyjegyű természetes szám számtani közepeként.)

Összesen $112 + 9 = 121$ ilyen szám van, így Szabina nyerési esélye $P(C) = \frac{121}{900}$.

Jelölje D azt az eseményt, hogy az adott számban egyik számjegy a másik kettő mértani közepe.

Ha a két számjegy mértani közepe	A másik két számjegy	Ennyi darab szám képezhető
0	0 és a	9
2	1 és 4	6
3	1 és 9	6
4	2 és 8	6
6	4 és 9	6

(A többi számjegy nem állítható elő két különböző egyjegyű természetes szám mértani közepeként.)

Összesen $33 + 9 = 42$ ilyen szám van, így Szilvia nyerési esélye $P(D) = \frac{42}{900}$.

Felhasználva a $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$ valószínűségszámítási tételt, annak a valószínűsége, hogy Szabina vagy Szilvia nyer:

$$P(C + D) = P(C) + P(D) - P(C \cdot D) = \frac{121}{900} + \frac{42}{900} - \frac{9}{900} = \frac{154}{900}.$$

Mindezek alapján Szonja nyerési esélye:

$$P(\overline{C + D}) = 1 - P(C + D) = 1 - \frac{154}{900} = \frac{746}{900}.$$

Mivel $\frac{746}{900} > 6 \cdot \frac{121}{900} = \frac{726}{900}$, így tehát igaz, hogy Szonja nyerési esélye több, mint hatszorosa Szabináénak.