

I. rész

1. Ágoston és Benedek egy-egy marék kavicsot tartanak a kezükben. Ha Benedek a sajátjai közül 10 kavicsot átadna Ágostonnak, akkor a kezükben tartott kavicsok számának szorzata 150-nel csökkenne. Ha Benedek nem 10, hanem 20 kavicsot adna át Ágostonnak, akkor a kezükben tartott kavicsok számának szorzata a harmadára csökkenne. Hány kavicsot tartottak a kezükben kezdetben? (12 pont)

Megoldás. Jelölje kezdetben Ágoston kavicsainak számát a , Benedek kavicsainak számát b .

A feladat szövege alapján felírható egyenletrendszer:

$$\left. \begin{aligned} (a+10)(b-10) &= ab-150, \\ (a+20)(b-20) &= \frac{ab}{3}. \end{aligned} \right\}$$

Az első egyenlet bal oldalán elvégezve a kijelölt szorzást, majd 10-zel osztva és rendezve $a = b + 5$ adódik. Ezt behelyettesítve a második egyenletbe, majd 3-mal beszorozva:

$$3(b+25)(b-20) = (b+5)b.$$

A műveleteket elvégezve, 2-vel osztva és nullára rendezve a $b^2 + 5b - 750 = 0$ egyenletet kapjuk. Ennek az egyenletnek a gyökei $b_1 = 25$ és $b_2 = -30$.

A negatív gyök nyilván nem megoldása a feladatnak.

Ellenőrzés. Ha Benedeknek kezdetben 25 kavicsa volt, akkor Ágoston $25 + 5 = 30$ -at tartott a kezében, ezek szorzata 750. Ha Benedek 10 kavicsot átad Ágostonnak, akkor kavicsaik számának szorzata $15 \cdot 40 = 600$ lesz, tehát valóban 150-nel csökkent. Ha nem 10, hanem 20 kavicsot ad át, akkor a szorzat $5 \cdot 50 = 250$ lesz, tehát valóban harmadára csökken.

Tehát kezdetben Benedeknek 25, Ágostonnak 30 kavics volt a markában.

2. Határozzuk meg az x értékét úgy, hogy az $x^2 + x - 2$, az $2x^2 + x + 3$ és a $4x^2 - 12$ kifejezések értéke ebben a sorrendben egy

a) számtani;

b) mértani

sorozat három egymást követő tagja legyen. (13 pont)

Megoldás. a) Ha a három kifejezés értéke számtani sorozatot alkot, akkor

$$(x^2 + x - 2) + (4x^2 - 12) = 2(2x^2 + x + 3).$$

Rendezve: $x^2 - x - 20 = 0$. Az egyenlet megoldásai $x_1 = 5$ és $x_2 = -4$.

Ellenőrzés. Az első esetben a sorozat 28; 58; 88, a második esetben pedig 10; 31; 52, mindkettő jó. Tehát x értéke 5 vagy -4 lehet.

b) Ha a három kifejezés értéke mértani sorozatot alkot, akkor

$$(x^2 + x - 2)(4x^2 - 12) = (2x^2 + x + 3)^2.$$

Elvégezve a kijelölt műveleteket:

$$4x^4 + 4x^3 - 20x^2 - 12x + 24 = 4x^4 + 4x^3 + 13x^2 + 6x + 9.$$

Rendezve: $0 = 33x^2 + 18x - 15 = 3(11x^2 + 6x - 5)$. Az egyenlet megoldásai $x_1 = -1$ és $x_2 = \frac{5}{11}$.

Ellenőrzés. Az első esetben a sorozat -2 ; 4 ; -8 , a második esetben pedig $-\frac{162}{121}$; $\frac{468}{121}$; $-\frac{1352}{121}$ (ekkor a hányados $-\frac{26}{9}$), mindkettő jó.

Tehát x értéke -1 vagy $\frac{5}{11}$ lehet.

3. a) Legyen a és b egy-egy olyan egész szám, amelyeket véletlenszerűen választunk a $[-10; 10]$ intervallumból. Mekkora a valószínűsége, hogy az $y = ax + b$ egyenletű egyenes áthalad a $P(2; 6)$ ponton?

b) Legyen G egy hétpontú teljes gráf, csúcsai P, Q, R, S, T, U és V . Hány olyan négypontú köre van G -nek, amely P és Q közül legalább az egyik csúcson áthalad? (13 pont)

Megoldás. a) Mivel a és b értéke is egymástól függetlenül 21-féle lehet, az összes esetek száma 441.

Kedvező esetet akkor kapunk, amikor P rajta van az egyenesen, tehát $6 = 2a + b$, azaz $a = 3 - \frac{b}{2}$.

Ha b páratlan, akkor a értékére nem egész szám adódik, tehát ekkor nincs megoldás.

Ha $-10 \leq b \leq 10$ és b páros, akkor egyrészt a egész, másrészt $-2 \leq a = 3 - \frac{b}{2} \leq 8$, tehát minden -10 és 10 közötti páros b értékhez tartozik egy-egy jó a érték, azaz 11 kedvező eset van.

A keresett valószínűség ezért $\frac{11}{441} \approx 0,025$.

b) *I. megoldás.* A gráf négy kiválasztott pontja három különböző négypontú kört határoz meg, mert háromféleképpen lehet kiválasztani a körben egymással nem szomszédos csúcspárokat.

A P csúcshoz az R, S, T, U és V csúcsok közül $\binom{5}{3} = 10$ -féleképpen választhatunk ki másik hármat egy P -t igen, de Q -t nem tartalmazó négypontú körhöz.

Hasonlóképpen a Q csúcshoz is 10-féleképpen választhatunk ki másik hármat egy Q -t igen, de P -t nem tartalmazó négypontú körhöz.

Végül egy P -t és Q -t is tartalmazó négypontú körhöz $\binom{5}{2} = 10$ -féleképpen választhatunk ki másik kettőt a maradék öt csúcs közül.

Mivel mind a 30 lehetséges pontnégyes három különböző négypontú kört határoz meg, így a feltételeknek megfelelő körök száma 90.

II. megoldás. A gráf négy kiválasztott pontja három különböző négypontú kört határoz meg, mert háromféleképpen lehet kiválasztani a körben egymással nem szomszédos csúcspárokat.

A gráf pontjai közül $\binom{7}{4} = 35$ -féleképpen választhatunk ki négyet egy négypontú körhöz. Ezen pontnégyesek számából levonjuk a rossz pontnégyesek számát, melyek sem P -t, sem Q -t nem tartalmazzák. Az ilyen pontnégyesek száma $\binom{5}{4} = 5$, tehát összesen $35 - 5 = 30$ megfelelő pontnégyes van.

Mivel mind a 30 lehetséges pontnégyes három különböző négypontú kört határoz meg, így a feltételeknek megfelelő körök száma 90.

4. a) *Mi lehet az alapszáma annak a számrendszernek, melyben teljesül az alábbi egyenlőtlenség?*

$$1410 < 1254 + 135.$$

b) *Egy n elemű halmaznak feleannyi 7 elemű részhalmaza van, mint 8 elemű. Határozzuk meg az n értékét. (13 pont)*

Megoldás. a) Mivel az egyenlőtlenségben szereplő legnagyobb számjegy az 5, ezért a számrendszer n alapszámára $n \geq 6$ teljesül (és $n \in \mathbb{Z}$).

Az n alapú számrendszer helyiértékei jobbról balra 1, n , n^2 és n^3 , ezért az egyenlőtlenség így írható:

$$n^3 + 4n^2 + n < (n^3 + 2n^2 + 5n + 4) + (n^2 + 3n + 5).$$

Rendezve: $n^2 - 7n - 9 < 0$.

A megfelelő másodfokú egyenlet gyökei:

$$n_1 = \frac{7 + \sqrt{85}}{2} \approx 8,1 \quad \text{és} \quad n_2 = \frac{7 - \sqrt{85}}{2} \approx -1,1.$$

Mivel a másodfokú kifejezés főegyütthatója pozitív, ezért az egyenlőtlenség $n_1 < n < n_2$ esetén teljesül.

Figyelembe véve még a megoldás elején kapott feltételt is, a számrendszer alapszáma 6, 7 vagy 8 lehet.

b) Az n elemű halmaz k elemű részhalmazainak száma $\binom{n}{k}$. Ha a halmaznak feleannyi 7 elemű részhalmaza van, mint 8 elemű, akkor

$$\frac{1}{2} = \frac{\binom{n}{7}}{\binom{n}{8}} = \frac{\frac{n!}{7! \cdot (n-7)!}}{\frac{n!}{8! \cdot (n-8)!}} = \frac{n!}{7! \cdot (n-7)!} \cdot \frac{8! \cdot (n-8)!}{n!} = \frac{8}{n-7},$$

ahonnan $n = 23$.

Ellenőrzés. A 23 elemű halmaz 7 elemű részhalmazainak száma $\binom{23}{7} = 245\,157$, ez valóban fele a 8 elemű részhalmazok számának, mely $\binom{23}{8} = 490\,314$.

II. rész

5. Három testvér betér egy fagyalttálcába. Nyolcféle fagyalt kapható: citrom, csokoládé, eper, karamell, meggy, puncs, sárgabarack és vanília.

(Az alábbi kérdéseknél a gombócok sorrendjétől minden esetben eltekintünk.)

a) Tünde három különböző ízű gombócot szeretne kérni. A puncsot nem szereti, ezért azt biztosan nem kér, a citrom viszont a kedvence, ha van, azt sosem mulasztja el. Hányféleképpen választhat Tünde?

b) Viola is háromgombócos fagyit eszik, de csak a csokoládét, a karamellt, a puncsot és a vaníliát szereti. Hányféleképpen választhat Viola, ha egy-egy ízből akár több gombóccal is ehet?

c) Zolinak mindegy, mit kap, ezért csak annyit mond a fagyaltosnak, hogy három különböző ízt szeretne. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a három gombóc közül pontosan kettő gyümölcsízű (citrom, eper, meggy vagy sárgabarack) lesz? (A fagyaltos a három gombóc ízét egymástól függetlenül, véletlenszerűen választja ki.)

d) Egy jó közelítéssel forgáskúp alakú tölcsér alapkörének belső átmérője 58 mm, magassága 83 mm. Hány dkg $0,6 \text{ g/cm}^3$ sűrűségű fagyalt fér ebbe a tölcsérbe, ha színültig töltjük? (16 pont)

Megoldás. a) Hat lehetséges íz közül kell kiválasztani két különbözőt úgy, hogy a kiválasztott ízek sorrendje nem számít. A lehetséges kiválasztások száma $\binom{6}{2} = 21$.

b) *I. megoldás.* Ha három különböző ízt kér, akkor 4 lehetősége van (aszerint, hogy melyiket hagyja ki).

Ha két különbözőt kér, akkor 4-féleképpen választhatja ki azt az ízt, amelyből két gombócot is kér, s e mellé 3-féleképpen a másikat. Ez összesen $4 \cdot 3 = 12$ különböző lehetőséget jelent.

Ha csak egyféle ízt kér, akkor ismét 4 lehetősége van.

Összesen tehát $4 + 12 + 4 = 20$ -féleképpen kérhet a feltételeknek megfelelően.

II. megoldás. 4 íz közül kell kiválasztani hármat úgy, hogy a kiválasztott ízek sorrendje nem számít, de egy-egy ízt többször is kiválaszthat. Ez megfelel 4 elem harmadosztályú ismétléses kombinációjának. A lehetőségek száma így $\binom{4+3-1}{3} = \binom{6}{3} = 20$.

c) *I. megoldás.* Négy gyümölcsíz közül kell kettőt, és a négy nem gyümölcsíz közül egyet kiválasztani (a sorrendre való tekintet nélkül). A kedvező esetek száma így $\binom{4}{2} \binom{4}{1} = 24$. Az összes eset száma: $\binom{8}{3} = 56$. A kért valószínűség így

$$p = \frac{24}{56} = \frac{3}{7} (\approx 0,429).$$

II. megoldás. Legyen az első gombóc gyümölcsízű, ennek a valószínűsége $\frac{4}{8}$. Annak a valószínűsége, hogy a második gombóc is gyümölcsízű (mivel az elsőnek választott ízt már nem kaphatja), $\frac{3}{7}$. Annak a valószínűsége, hogy a harmadik gombóc nem gyümölcsízű, $\frac{4}{6}$.

Mivel a három esemény egymástól független, ezért annak a valószínűsége, hogy a három gombóc közül az első kettő gyümölcsízű, a harmadik nem, az előzőek szorzata, tehát $\frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{6} = \frac{1}{7}$.

A nem gyümölcsízű gombócot ugyanekkora valószínűséggel kaphatja elsőként vagy másodikként is, így a keresett valószínűség ennek az értéknek a háromszorosa, tehát $\frac{3}{7} (\approx 0,429)$.

d) $r = 2,9 \text{ cm}$, $m = 8,3 \text{ cm}$.

A tölcsér térfogata $V = \frac{2,9^2 \cdot \pi \cdot 8,3}{3} (\approx 73,1 \text{ cm}^3)$. Ebbe a tölcsérbe így (színültig töltve) $m = \rho V \approx 43,9 \text{ g}$, azaz kb. 4,4 dkg fagyalt fér.

6. Egy 20 cm sugarú körbe írt ABC hegyesszögű háromszög két oldala $AC = 34 \text{ cm}$ és $BC = 30 \text{ cm}$.

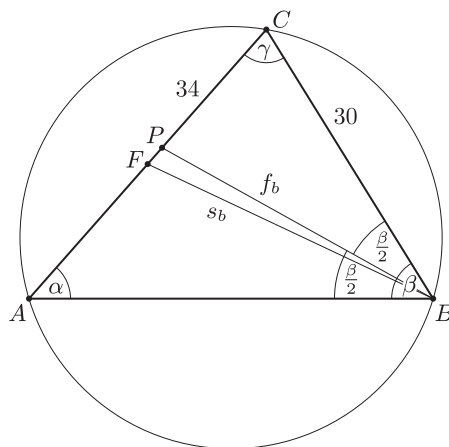
a) *Határozzuk meg a háromszög AB oldalának hosszát.*

b) *Határozzuk meg a háromszög B csúcsához tartozó szögfelezőjének és súlyvonalának hosszát.* (16 pont)

Megoldás. a) Jelöljük a háromszög szögeit a szokott módon α -val, β -val, illetve γ -val. Az ismert $a = 2r \cdot \sin \alpha$ képlet alapján

$$\sin \alpha = \frac{30}{2 \cdot 20} = 0,75,$$

ahonnan $\alpha \approx 48,6^\circ$ (hiszen hegyesszög).



$\sin \beta = 0,85$, ahonnan $\beta \approx 58,2^\circ$ (hiszen hegy vessző). Innen

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta \approx 73,2^\circ,$$

majd

$$AB = 2 \cdot 20 \cdot \sin 73,2^\circ \approx 38,3 \text{ cm.}$$

b) Az AC oldal felezőpontját F -fel jelölve a B csúsból induló súlyvonal hossza (s_b) kiszámítható a BCF háromszögből koszinusztétellel:

$$s_b = \sqrt{30^2 + 17^2 - 2 \cdot 30 \cdot 17 \cdot \cos \gamma} \approx 29,9 \text{ cm.}$$

A B -ből induló szögfelező metszéspontját az AC oldallal jelölje P .

$$\angle CPB = 180^\circ - \frac{\beta}{2} - \gamma \approx 77,7^\circ.$$

A B -ből induló szögfelező hossza (f_b) ezután kiszámítható a BCP háromszögből szinusz-tétellel:

$$\frac{f_b}{30} = \frac{\sin \gamma}{\sin \angle CPB}, \quad \text{ahonnan} \quad f_b \approx 29,4 \text{ cm.}$$

7. Van hatféle számkártyánk, mindegyikből 1-1 darab: 1, 2, 3, 4, 5, 6. A kártyákat véletlenszerűen sorba rendezve hatjegyű számokat képezünk.

a) Igazoljuk, hogy $\frac{4}{15}$ annak a valószínűsége, hogy az így kapott szám osztható lesz 12-vel.

b) Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy az így kapott szám a 6-os számjeggyel kezdődik, feltéve, hogy 12-vel osztható.

c) Egy papírlapra felírjuk a számkártyákból képezhető összes lehetséges hatjegyű számot.

Határozzuk meg a papírlapra felírt számok mediánját.

(16 pont)

Megoldás. a) 12-vel akkor osztható egy szám, ha 3-mal és 4-gyel is osztható. A képzett szám 3-mal biztosan osztható lesz, mert (a kártyák sorrendjétől függetlenül) számjegyeinek összege 21 (ami osztható 3-mal). 4-gyel akkor osztható egy szám, ha az utolsó két számjegyből képzett szám osztható 4-gyel. Az utolsó két helyre ezért a következő kártyák kerülhetnek: 12, 32, 52, 24, 64, 16, 36, 56, ez 8 lehetőség.

Az utolsó két helyre az összes lehetőség: $6 \cdot 5 = 30$. Mivel minden esetben ugyanannyiféle lehet az első négy számjegy, a keresett valószínűség $\frac{8}{30} = \frac{4}{15}$.

b) Jelölje A azt az eseményt, hogy a kapott szám 6-ossal kezdődik, B pedig azt az eseményt, hogy 12-vel osztható. Ezzel a jelöléssel meghatározandó a $P(A | B)$ valószínűség. A feltételes valószínűség definíciója szerint

$$P(A | B) = \frac{P(AB)}{P(B)}.$$

Tudjuk, hogy $P(B) = \frac{4}{15}$. Határozzuk meg $P(AB)$ -t: ha a kapott szám 6-ossal kezdődik, akkor 12-vel csak akkor lehet osztható, ha az utolsó két számjegyből képzett szám 12, 32, 52 vagy 24. A második, harmadik és negyedik számjegy mind a négy esetben $3! = 6$ -féle lehet. Összesen tehát $6 \cdot 4 = 24$ ilyen szám van.

Az összes felírható szám $6! = 720$. Tehát

$$P(AB) = \frac{24}{720} = \frac{1}{30}.$$

Ezért

$$P(A | B) = \frac{\frac{1}{30}}{\frac{4}{15}} = \frac{1}{8}.$$

c) 720 darab ilyen szám van, a medián ezért a nagyság szerint sorba rendezett számok közül a két középső átlaga. Nagyság szerint a két középső szám a legnagyobb 3-mal és a legkisebb 4-gyel kezdődő szám lesz, ezek a 365 421 és a 412 356, ezért a medián

$$\frac{365\,421 + 412\,356}{2} = \frac{777\,777}{2} = 388\,888,5.$$

8. Gyurta Dániel 2009-ben, Rómában szerezte első világ bajnoki aranyérmét a 200 méteres mellúszásban. Győztes ideje 2:07.64 volt (2 perc 7 másodperc 64 századmásodperc). Egyetlen századmásodperccel előzte meg az amerikai Eric Shanteau-t.

a) Határozzuk meg Gyurta Dániel átlagsebességét a teljes távon. A választ km/h-ban, egy tizedesjegy pontossággal adjuk meg.

b) Az úszók rendszerint gyorsabbak a táv elején. Gyurta Dániel a második 100 métert 1:05.50 alatt tette meg. Ezen belül az utolsó 50 méter megtételéhez 10 századmásodperccel több időre volt szüksége, mint a megelőző 50 méter megtételéhez. Határozzuk meg Gyurta Dániel idejét az utolsó 50 méteren.

c) Eric Shanteau az első 100 métert 1:01.22, a második 100 métert 1:06.43 alatt tette meg. Gyurta Dániel célba érkezésekor az amerikai úszónak még hány centiméter volt hátra a teljes távból? (Tételezzük fel, hogy a második 100 métert egyenletes tempóban tette meg a versenyző.) A választ egy tizedesjegy pontossággal adjuk meg.

d) Hugó, Hanna és Ödön, a három testvér ugyanabba az uszodába járnak úszóedzésre. Hugó (a legkisebb) a 20 méteres, Hanna a $33\frac{1}{3}$ méteres, Ödön az 50 méteres medencében edz. Az egyik edzésen Hanna négygel több hosszt úszott, mint Ödön, Hugó pedig négygel több hosszt úszott, mint Hanna. A Hugó, Hanna és Ödön által leúszott távolságok (ebben a sorrendben) egy növekvő számtani sorozat szomszédos tagjai.

Határozzuk meg mindhárom gyerek esetén az edzésen általa leúszott távolságot. (16 pont)

Megoldás. a) 2 perc 7 másodperc 64 századmásodperc = 127,64 másodperc = $\frac{127,64}{3600}$ óra, 200 m = 0,2 km. Gyurta Dániel átlagsebessége

$$\frac{0,2}{\frac{127,64}{3600}} = \frac{720}{127,64} \approx 5,6 \text{ km/h} \quad \text{volt.}$$

$$b) x = \frac{1 : 05.50 - 0 : 00.10}{2} = \frac{1 : 05.40}{2} = \frac{65.40}{2} = 32.70 \text{ az ideje a harmadik, 32.80 pedig az utolsó 50 méteren.}$$

Event 125

Men's 200m Breaststroke
200m Brasse Hommes

Final
Finale

Results

Résultats

	Record	Splits	Name	NOC Code	Location	Date
WR	2:07.31	28.91	1:01.51	1:34.40	SPRENGER Christian	AUS Roma (ITA) 30 JUL 2009
CR	2:07.31	28.91	1:01.51	1:34.40	SPRENGER Christian	AUS Roma (ITA) 30 JUL 2009

Final

Event No. 25

Rank	Lane	Name	NOC Code	R.T.	50m	100m	150m	Time	Time Behind
1	6	GYURTA Daniel	HUN	0.86	(7) 29.30	(8) 1:02.14	(6) 1:34.84	2:07.64	
					32.84	32.70			
2	5	SHANTEAU Eric	USA	0.75	(4) 28.91	(4) 1:01.22	(2) 1:34.25	2:07.65	0.01
					32.31	33.03	33.40		
3	2	TITENIS Giedrius	LTU	0.86	(2) 28.81	(2) 1:01.14	(3) 1:34.26	2:07.80	0.16
					32.33	33.12	33.54		
3	4	SPRENGER Christian	AUS	0.73	(1) 28.65	(3) 1:01.17	(4) 1:34.55	2:07.80	0.16
					32.52	33.38	33.25		
5	3	RICKARD Brenton	AUS	0.76	(3) 28.89	(1) 1:01.04	(1) 1:34.08	2:08.23	0.59
					32.15	33.04	34.15		
6	8	GIORGETTI Edoardo	ITA	0.73	(8) 29.48	(7) 1:02.08	(7) 1:34.96	2:08.86	1.22
					32.60	32.88	33.90		
7	1	BARBOSA Henrique	BRA	0.82	(5) 28.93	(5) 1:01.45	(5) 1:34.66	2:09.35	1.71
					32.52	33.21	34.69		
8	7	FACCI Loris	ITA	0.84	(6) 29.10	(6) 1:01.87	(8) 1:35.55	2:10.26	2.62
					32.77	33.88	34.71		

c) Shanteau a második 100 métert (egyenletes tempóban) 66 másodperc 43 századmásodperc, tehát 6643 századmásodperc alatt tette meg. Gyurta Dániel célba érkezésekor még 1 századmásodpercnyi útja, azaz

$$\frac{100}{6643} \approx 0,015 \text{ méter} = 1,5 \text{ cm}$$

volt hátra.

d) *I. megoldás.* A Hanna által leúszott hosszok számát jelölje n , ekkor Hugó $n + 4$, Ödön pedig $n - 4$ hosszt úszott. Ekkor Hugó $20(n + 4)$, Hanna $33\frac{1}{3}n$, Ödön pedig $50(n - 4)$ métert úszott. A feladat szövege szerint ez a három távolság számtani sorozatot alkot, így

$$50(n - 4) + 20(n + 4) = 2 \cdot 33\frac{1}{3}n.$$

Innen $3\frac{1}{3}n = 120$, azaz $n = 36$.

Hugó 40, Hanna 36, Ödön 32 hosszt úszott, az általuk leúszott távolságok pedig rendre 800, 1200 és 1600 méter. Ezek a távolságok valóban számtani sorozatot alkotnak.

II. megoldás. A Hanna által leúszott távolságot m -mel, a számtani sorozat differenciáját d -vel jelölve megoldandó a

$$\left. \begin{aligned} 20(m + 4) &= m - d \\ 33\frac{1}{3}m &= m \\ 50(m - 4) &= m + d \end{aligned} \right\}$$

egyenletrendszer. Az első egyenlet ötszöröséből kivonva a második egyenlet háromszorosát:

$$(1) \quad 400 = 2m - 5d.$$

A harmadik egyenlet kétszereséből kivonva a második egyenlet háromszorosát:

$$(2) \quad -400 = -m + 2d.$$

Az (1) egyenlethez hozzáadva a (2) egyenlet kétszeresét $d = 400$ adódik, amit visszahelyettesítve (1)-be kapjuk, hogy $m = 1200$, majd ezeket az értékeket az eredeti egyenletrendszer valamelyik egyenletébe helyettesítve $n = 36$ adódik.

Hugó 40, Hanna 36, Ödön 32 hosszt úszott, az általuk leúszott távolságok pedig rendre 800, 1200 és 1600 méter. Ezek a távolságok valóban egy (400 differenciájú) számtani sorozatot alkotnak.

9. *Egy duatlon verseny rajtja egy egyenes tengerparton van, célja a vízben. Egyik lehetőség a táv teljesítésére, hogy először 4 km-t fut a versenyző a parton, majd 90 fokkal elfordulva 1 km-t úszik a tengerben. Azonban megengedett bármikor letérni a futópályáról és úszni kezdeni a cél felé.*

a) *Mennyi idő alatt ér célba Dénes, akinek a tengerparti homokban futva 8 km/h, a vízben úszva 1,5 km/h a sebessége, és 3,5 km lefutása után kezd el úszni a cél felé?*

b) *Juli sebessége futva 6 km/h, úszva 2 km/h. A 4 km-es futópálya vége előtt hány méterrel érdemes úszni kezdenie ahhoz, hogy a lehető leggyorsabban teljesítse a távot? Mekkora ez az idő?* (16 pont)

Megoldás. a) Dénesnek úszva $s_{\text{ú}} = \sqrt{1^2 + 0,5^2} \approx 1,118$ km-t kell megtennie, ehhez $t_{\text{ú}} = \frac{s_{\text{ú}}}{v_{\text{ú}}} = \frac{1,118}{1,5} \approx 0,745$

órára van szüksége. A 3,5 km lefutásához szükséges idő $t_{\text{f}} = \frac{s_{\text{f}}}{v_{\text{f}}} = \frac{3,5}{8} \approx 0,438$ óra.

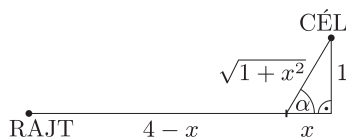
A teljes táv megtételéhez szükséges idő $t = t_{\text{f}} + t_{\text{ú}} \approx 1,183$ óra, azaz kb. 71 perc.

b) *I. megoldás.* Jelölje x azt a (kilométerben mért) távolságot, amennyivel a 4 km-es futópálya vége előtt Juli bevág a vízbe. Ekkor a teljes táv megtételéhez szükséges idő

$$t = t_{\text{f}} + t_{\text{ú}} = \frac{4 - x}{6} + \frac{\sqrt{1^2 + x^2}}{2}.$$

Vizsgáljuk a $t(x)$ függvényt a $(0; 4)$ intervallumon. A függvénynek minimumhelye ott lehet, ahol a deriváltja 0.

$$t'(x) = -\frac{1}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \cdot 2x = \frac{x}{2\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{6}.$$



Ha $t'(x) = 0$, akkor

$$\frac{x}{2\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{6}, \quad \text{azaz} \quad 6x = 2\sqrt{1+x^2}.$$

Négyzetre emelve $36x^2 = 4(1 + x^2)$, ahonnan $x^2 = \frac{1}{8}$, tehát (figyelembe véve, hogy $x > 0$) $x = \frac{1}{2\sqrt{2}} \approx 0,354$ km.

$$t'(x) = \frac{x}{2\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}} - \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{1+x^2}} - \frac{1}{6},$$

s innen látszik, hogy x növelésével a gyök alatti törtkifejezés nevezője nő, a törtkifejezés értéke csökken, így a gyök alatti kifejezés értéke nő. A deriváltfüggvény tehát $x = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ -ben negatívból pozitívba megy át, így az adott helyen

valóban minimuma van a t függvénynek. (Behelyettesítve azt kapjuk, hogy $t(0)$ és $t(4)$ nagyobb, mint $t\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$).

Tehát a futópálya vége előtt kb. 354 méterrel érdemes Julinak úszni kezdenie. A táv megtételéhez szükséges idő ekkor

$$\begin{aligned} t\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) &= \frac{4 - \frac{1}{2\sqrt{2}}}{6} + \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{8}}}{2} = \frac{2}{3} - \frac{1}{12\sqrt{2}} + \frac{3}{4\sqrt{2}} = \frac{2}{3} + \frac{8}{12\sqrt{2}} = \\ &= \frac{2}{3} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{2 + \sqrt{2}}{3} \approx 1,138 \text{ óra, azaz kb. 68 perc.} \end{aligned}$$

II. megoldás. Jelölje α azt a szöget, amit az optimális irányú úzás a futópályával bezár. Ekkor az úzás megkezdésekor a futópályából hátralevő szakasz hossza $\text{ctg } \alpha$, az úszva megteendő táv pedig $\frac{1}{\sin \alpha}$. A teljes táv megtételéhez szükséges idő

$$t = t_f + t_u = \frac{4 - \text{ctg } \alpha}{6} + \frac{1}{2 \sin \alpha}.$$

Vizsgáljuk a $t(\alpha)$ függvényt a $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ intervallumon. A függvénynek minimumhelye ott lehet, ahol a deriváltja 0.

$$t'(\alpha) = \frac{1}{6 \sin^2 \alpha} - \frac{\cos \alpha}{2 \sin^2 \alpha} = \frac{1 - 3 \cos \alpha}{6 \sin^2 \alpha}.$$

Ha $t'(\alpha) = 0$, akkor $1 - 3 \cos \alpha = 0$, azaz $\cos \alpha = \frac{1}{3}$, tehát $\alpha_{\min} \approx 70,53^\circ$ (1,231 radián).

Mivel α növelésével $\cos \alpha$ csökken, a deriváltfüggvény tehát ebben a pontban negatívból pozitívba megy át, így az adott helyen valóban minimuma van a t függvénynek. (Behelyettesítve azt kapjuk, hogy $t(0)$ és $t\left(\frac{\pi}{2}\right)$ nagyobb, mint $t(70,53^\circ)$).

Tehát a futópálya vége előtt kb. $\text{ctg } 70,53^\circ \approx 0,354$ kilométerrel érdemes Julinak úszni kezdenie.

A táv megtételéhez szükséges idő ekkor $t(\alpha_{\min}) \approx 1,138$ óra, azaz kb. 68 perc.