I. rész

1. Egy 18 fős csoportban a fizika tantárgy átlaga két tizedesre kerekítve 3,72 volt. Tudjuk, hogy senki sem bukott meg.

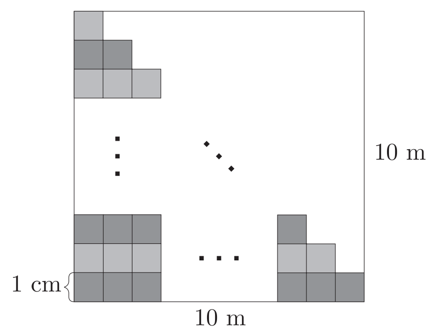
a) Legfeljebb hányan kaphattak kettest?

b) Biztos-e, hogy volt valakinek ötöse?

c) Az osztály másik csoportjába 16 diák jár, akik fizika átlaga 4,12 volt. Mekkora az osztály átlaga fizikából? (*13 pont*)

2. Egy irodaház egyik oldalfalának díszítésére pályázatot írtak ki. Az oldalfal alakja 10 m oldalhosszúságú négyzet.

A győztes pályázó 1 cm oldalhosszúságú, négyzet alakú, piros, illetve kék színű kerámia lapocskákból rakott ki hézagmentesen egy mintát az *ábra* szerint úgy, hogy a talaj szintjén kezdődő legalsó sort teljesen kitöltötte a lapocskákkal. Ha felfelé haladunk, minden egyes rákövetkező sorba eggyel kevesebb lapocska került. Minden sorba csak azonos színű lapocskák kerültek, és az egymással érintkező sorok különböző színűek voltak.



Vannak-e ennek a kerámia mintának olyan, legalább 10 sormagasságú részei, részmintái, melyek közvetlenül egymás alatt lévő, teljes sorokból állnak, a bennük lévő lapocskák száma 2016, valamint az alsó és felső sora azonos színű? Ha igen, adjuk meg, hogy felülről számítva hányadik sornál kezdődnek, és hány sor tartozik hozzájuk. (*11 pont*)

3. Az ABC háromszög két csúcsának koordinátái: $A(3;-2)$ és $B(3;6)$. Az A csúcsnál lévő α szög felezője a BC oldalt az $F_\alpha\left(\dfrac{8+3\sqrt{3}}{\sqrt{3}};6\right)$ pontban metszi.

Határozzuk meg a C csúcs koordinátáinak pontos értékét.

b) Legyen az ABP háromszög olyan, hogy az A és B csúcs egyezzen meg az *a*)-beli A és B ponttal, és oldalai mérőszámának négyzetösszege egyezzen meg területe mérőszámának hétszeresével.

Határozzuk meg a feltételnek megfelelő P pontok mértani helyét, ha tudjuk, hogy a P pont abszcisszája nagyobb a másik két csúcs abszcisszájánál. (*14 pont*)

4. *a*) Legyen az $\{a_n\}$ sorozat első tagja 1, a második tagja pedig 2. A sorozat elemeit a harmadik tagtól kezdve a következő képzési szabály (rekurzió) adja meg:

$$a_{n+2} := \frac{a_{n+1}+1}{a_n}, \quad \text{ha} \ \ n \geq 1.$$

Határozzuk meg a számsorozat 2016. elemét.

b) A Heuréka Alapítvány támogatni szeretné a matematikából tehetséges diákokat. Ennek érdekében a támogatók által adományozott pénzt 2016. január 1-jén évi 3,2%-os, állandó kamatozású folyószámlán helyezte el. A pénzintézet minden év utolsó napján írja jóvá a kamatokat, az alapítvány pedig az első év lejártától kezdve minden év január 1-jén utalja a támogatást a fiataloknak. Az évente nyújtott támogatás összege mindig az első év végén kamatként kapott összeg két és félszerese.

Mikor tud az alapítvány utoljára a szabályzatában lefektetett módon teljes támogatást fizetni, ha nincsenek egyéb bevételei és kiadásai sem? (*13 pont*)

II. rész

5. *a*) Egy hegység öt leglátogatottabb csúcsán van egy-egy kilátó. Minden kilátóból bármelyik kilátóba közvetlenül eljuthatunk libegővel vagy gyalog, de mindig csak az egyik módon. András, a helyszínt nem ismerve azt állította, hogy lehet olyan, mindegyik kilátót érintő kirándulást szervezni, amelyen csak az egyik módon közlekedünk.

Igaza van Andrásnak?

b) Az A városból 60 km/h sebességgel indul el egy személyvonat a B városba. A személyvonat után indul valamivel később egy gyorsvonat ugyanezen az útvonalon, másfélszeres sebességgel. A gyorsvonat így a személyvonatot éppen a B városban érné utol. Sajnos a személyvonat műszaki hiba miatt útjának kétharmad részétől csak az eredeti sebességének felével tud haladni, így a két vonat már a B város előtt 45 km-re lévő C város pályaudvarán találkozik.

Milyen messze van C város az A várostól, ha a vonatok sebességét az egyes szakaszokon állandónak tekintjük? (*16 pont*)

6. *a*) Oldjuk meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán:

$$\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{24+x-10\sqrt{x-1}}=5.$$

b) Mely valós számok esetén lesz a $\sin(2x)$ mértani közepe a $\sin(x)$-nek és a $\cos(x)$-nek, ha mindhárom kifejezés nemnegatív értékeket vesz fel? (*16 pont*)

7. Egy kistermelő földjén nagyon sok görögdinnye termett. Kiválasztott közülük 33 db egyforma, 28 cm átmérőjű gömb alakú termést, és a közeli piacra vitte értékesíteni.

a) A termelő az utánfutójában egy rétegben szerette volna elhelyezni a dinnyéket. Bármilyen szorosan is pakolta, nem sikerült. Hány db dinnyét kellett a gépkocsi hátsó ülésére betenni, ha az utánfutóra a lehető legtöbb dinnyét tette egy rétegben, és az utánfutó belső méretei: 200 cm $\times$ 130 cm?

b) A piacon 85 cm magasak a standok, ahová az árusok kipakolhatják az árut. A gazda kiszámolta, hogy egymás mellé három olyan „piramist” (*3. ábra*) tud építeni a dinnyékből, amelyeknél az alsó szintre hét (*1. ábra*), a második szintre három (*2. ábra*), a harmadik szintre pedig egy dinnyét (3. ábra) helyez szorosan egymás mellé, illetve egymásra. Amikor a vevőkkel tárgyal a dinnyehalmok mögül, szereti, ha semmi sem zavarja a beszélgetést és a fizetést. Ezért nem akarta azt, hogy a dinnyékből épített bármelyik rakás csúcsa a földtől számítva 150 cm-nél magasabban legyen. Teljesült-e ez a kívánság a fent említett elrendezés esetén? (*16 pont*)

1. ábra

2. ábra

3. ábra

8. Adott az $f\colon\ ]-1;6] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \left|x^2 - 4x + 3\right| - \left|x^2 - 6x + 5\right|$ függvény.

a) Ábrázoljuk az f függvény grafikonját a megadott értelmezési tartományban.

i) Adjuk meg az f függvény értékkészletét.

ii) Határozzuk meg algebrai úton az f zérushelyeit.

b) Határozzuk meg az f függvény grafikonja 4 abszcisszájú pontjába húzható érintő egyenes iránytangensét és egyenletét.

c) Toljuk el az $y = 2x^2 - 10x + 8$ függvény grafikonját a $\mathbf{v}(-2{,}5; 4{,}5)$ vektorral.

i) Adjuk meg az így kapott függvény hozzárendelési szabályát.

ii) Számítsuk ki az eltolt grafikon és az $y = 4{,}5$ egyenletű egyenes által bezárt síkrész területét. (*16 pont*)

9. *a*) A Lutri Lottón a 75-nél nem nagyobb pozitív egész számok közül húznak ki 5-öt úgy, hogy a kihúzott számokat nem teszik vissza, és a húzási sorrend nem számít. Egy szelvénnyel akkor lehet nyerni, ha rajta legalább két találatot értek el. Szerencsés Szilárd 10 szelvénnyel játszik a Lutri Lottón. Ha a szelvényeket egymástól függetlenül tölti ki, mennyi annak a valószínűsége, hogy

1. nyer;
2. legalább három szelvényen két találata lesz?

b) Szilárdnak három húga van: Szabina, Szilvia és Szonja. A három lány (Szilárddal együtt) a következő játékot játssza: megkérik édesanyjukat, hogy mondjon egy – találomra kiválasztott – háromjegyű számot. Ha az adott számban az egyik számjegy a másik kettő számtani közepe, akkor Szabina, ha az egyik számjegy a másik kettő mértani közepe, akkor Szilvia, ha pedig egyik feltétel sem teljesül, akkor Szonja kap egy cukorkát Szilárdtól.

Igaz-e, hogy Szonja nyerési esélye több, mint hatszorosa Szabina nyerési esélyének? (*16 pont*)