

1. Vívásban az nyer egy asszót, aki hamarabb ér el 15 találatot. Tegyük fel, hogy A és B küzdelmében (az asszón belül bármikor) p valószínűséggel A , $q = 1 - p$ valószínűséggel pedig B szerzi meg a következő találatot. (Ketten egyszerre sosem érnek el találatot.)

Tegyük fel, hogy egy asszóban A már $14 - k$, B pedig $14 - \ell$ találatot szerzett (ahol k és ℓ nemnegatív, 15-nél kisebb egészek), és A újabb találatot ér el. Mennyivel növekedett ezáltal annak a valószínűsége, hogy A nyeri végül az asszót?

Megoldás. Jelölje $P_{k,\ell}$ az A vívó győzelmének valószínűségét a feladatban leírt állásnál, $p_{k,\ell}$ pedig a kért növekményt. A teljes valószínűség tétele miatt $P_{k,\ell} = p \cdot P_{k-1,\ell} + q \cdot P_{k,\ell-1}$, amit átrendezve $p_{k,\ell} = P_{k-1,\ell} - P_{k,\ell} = q(P_{k-1,\ell} - P_{k,\ell-1})$ adódik.

Feltételezhetjük, hogy A és B 29 találatig vívják az asszót, hisz ez a győztes kilétét nem változtatja meg. Így $P_{k-1,\ell}$ annak a valószínűsége, hogy a hátralévő $k + \ell$ találat közül A legalább k találatot szerez, míg $P_{k,\ell-1}$ annak a valószínűsége, hogy a hátralévő $k + \ell$ találat közül A legalább $k + 1$ találatot szerez. Ezért a $p_{k,\ell} = P_{k-1,\ell} - P_{k,\ell-1}$ különbség annak a valószínűsége, hogy A a hátralévő $k + \ell$ lehetőségéből pontosan k találatot szerez, azaz $p_{k,\ell} = \binom{k+\ell}{k} p^k q^{\ell+1}$. $\square$

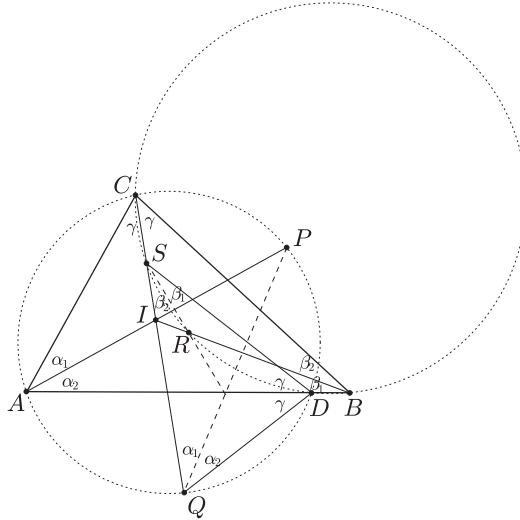
2. A D pont az ABC háromszög AB oldalán, az I pont pedig az ACB szög felezőjének a háromszög belsejébe eső szakaszán helyezkedik el. Az AI és a CI egyenesek az ACD kört másodszor rendre a P és Q pontokban metszik. Hasonlóan, a BI és a CI egyenesek a BCD kört másodszor rendre az R és S pontokban metszik. Mutassuk meg, hogy ha $P \neq Q$ és $R \neq S$, akkor az AB , PQ és RS egyenesek vagy egy ponton mennek át, vagy párhuzamosak egymással.

Megoldás. Legyen

$$\alpha_1 = \angle IAC, \quad \alpha_2 = \angle BAI, \quad \beta_1 = \angle IBA, \quad \beta_2 = \angle CBI, \quad \gamma = \angle ICB = \angle ACI.$$

Írjuk fel a Ceva-tétel trigonometrikus alakját az ABC háromszögre és az I pontra:

$$\frac{\sin \angle IAC}{\sin \angle BAI} \cdot \frac{\sin \angle IBA}{\sin \angle CBI} \cdot \frac{\sin \angle ICB}{\sin \angle ACI} = \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} \cdot \frac{\sin \beta_1}{\sin \beta_2} \cdot \frac{\sin \gamma}{\sin \gamma} = 1.$$



A kerületi szögek tételéből (irányított, azaz modulo 180° szögekkel):

$$\angle PQS = \angle PQC = \angle PAC = \angle IAC = \alpha_1,$$

$$\angle DQP = \angle DAP = \angle BAI = \alpha_2,$$

$$\angle RSD = \angle RBD = \angle IBA = \beta_1,$$

$$\angle QSR = \angle CSR = \angle CBR = \angle CBI = \beta_2,$$

$$\angle ADQ = \angle ACQ = \angle ACI = \gamma,$$

$$\angle SDA = \angle SDB = \angle SCB = \angle ICB = \gamma.$$

Végül alkalmazzuk a Ceva-tétel (trigonometrikus alakjának) megfordítását a DSQ háromszögre. Mivel

$$\frac{\sin \angle ADQ}{\sin \angle SDA} \cdot \frac{\sin \angle RSD}{\sin \angle QSR} \cdot \frac{\sin \angle PQS}{\sin \angle DQP} = \frac{\sin \gamma}{\sin \gamma} \cdot \frac{\sin \beta_1}{\sin \beta_2} \cdot \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = 1,$$

a $DA = AB$, RS és PQ egyenesek egy ponton mennek át, vagy párhuzamosak egymással. $\square$

Megjegyzés. Láttuk, hogy az ABC háromszög hasonló a QSD háromszöghöz. Legyen I' az ABC háromszög I pontjának megfelelője a QSD háromszögben. A fenti bizonyítás kulcsa az, hogy a QSD háromszögben az I' izogonális konjugáltja éppen az AB , PQ és RS egyenesek közös pontja.

3. Legyen Q az olyan n tagú sorozatok halmaza, amelyeknek minden tagja 0 vagy 1. Legyen A a Q -nak egy 2^{n-1} elemű részhalmaza. Mutassuk meg, hogy legalább 2^{n-1} olyan (a, b) pár van, amelyre $a \in A$, $b \in Q \setminus A$, továbbá az a és b sorozatok csak egyetlen tagban térnek el egymástól.

I. megoldás. A feladatban megfogalmazottnál erősebb állítást bizonyítunk. Legyen A a Q -nak egy tetszőleges részhalmaza, és legyen $B = Q \setminus A$. Ekkor az olyan (a, b) párok száma, amelyekben $a \in A$, $b \in B$, továbbá az a és b sorozatok csak egyetlen tagban térnek el egymástól, legalább $\min(|A|, |B|)$. Világos, hogy a fenti állítás $|A| = 2^{n-1}$ esetén éppen a kitűzött feladat.

A fent megfogalmazott állítást n szerinti teljes indukcióval igazoljuk. Ha $n = 1$, akkor az állítás nyilvánvalóan igaz. Tegyük fel, hogy az állítás n -re igaz, és lássuk be $(n + 1)$ -re. Legyenek tehát az A halmaz elemei bizonyos $n + 1$ tagú 0/1-sorozatok, B pedig álljon a többi $n + 1$ tagú 0/1-sorozatból. Feltehetjük, hogy $|A| \leq |B|$, mert ellenkező esetben felcserélhetjük A és B szerepét. Legyen az A -beli, 0-ra végződő sorozatok száma x , az 1-re végződők y . Ekkor tehát $x + y = |A| \leq 2^n$. Feltehetjük, hogy $x \geq y$. Ekkor $y \leq 2^{n-1}$.

A feladatban leszámílandó (a, b) párok négyfélék lehetnek aszerint, hogy mi a , illetve b utolsó tagja.

1. Olyan párokból, ahol ez a két utolsó tag 1, az indukciós feltevés szerint legalább $\min(y, 2^n - y) = y$ darab van.
2. Olyanokból, ahol ez a két utolsó tag 0, az indukciós feltevés szerint legalább $\min(x, 2^n - x) \geq y$ darab van.
3. Olyanokból, ahol a utolsó tagja 0, b -é pedig 1, legalább $x - y$ darab van, hiszen az x darab A -beli, 0-ra végződő sorozat között legfeljebb y olyan lehet, amelynek utolsó tagját 1-re változtatva ismét A -beli sorozatot kapunk.
4. A negyedik fajta párból legalább 0 darab van.

A vizsgált párok száma tehát legalább $y + y + (x - y) + 0 = x + y = |A|$. Ezzel az indukciós lépést igazoltuk, a fent megfogalmazott állítás bizonyítását befejeztük. $\square$

II. megoldás. Az I. megoldásban igazolt állításnál egy erősebbet bizonyítunk az alábbiakban.

Azt mondjuk, hogy a Q -beli $q_1, q_2, \dots$ sorozatok *monoton sort* alkotnak, ha minden értelmes i -re q_i és q_{i+1} egyetlen tagban tér el egymástól, továbbá q_i és q_{i+1} eltérése korábban van, mint a q_{i+1} és q_{i+2} eltérése. Világos például, hogy egy monoton sor hossza legfeljebb $n + 1$ lehet, de az is könnyen látható, hogy tetszőleges $x, y \in Q$ sorozatokra pontosan egy olyan monoton sor létezik, amely x -szel kezdődik és y -ra végződik.

Legyen most $A \subseteq Q$, $B = Q \setminus A$, és tegyük fel, hogy $|A| \leq 2^{n-1}$. Az iménti megfigyelésünk szerint az olyan monoton sorok száma, amelyek A -beli sorozatból indulnak és B -beliben érnek véget, pontosan $|A| \cdot |B|$. Világos, hogy minden ilyen $q_1, q_2, \dots$ monoton sorhoz van legalább egy olyan i index, amelyre $q_i \in A$ és $q_{i+1} \in B$.

Most tegyük fel, hogy az $a \in A$ és $b \in B$ sorozatok pontosan egy (mondjuk az i -edik) tagban térnek el. Az olyan monoton sorok száma, amelyek az a és a b sorozatot is tartalmazzák, pontosan 2^{n-1} , hiszen minden ilyen monoton sort egyértelműen meghatároznak azok a helyek, amelyeken található tagokban a sorban egymást követő sorozatok eltérnek. Az i -dik hely bizonyosan ilyen eltérés (az egymást követő a és b sorozatok miatt), a fennmaradó $n - 1$ hely mindegyikéről pedig egymástól függetlenül eldönthetjük, hogy legyen-e a monoton sorban két egymást követő sorozat, amelyek ott térnek el, vagy ne.

Ezek szerint a feladatban leírt (a, b) párok számának 2^{n-1} -szerese nem lehet kisebb $|A| \cdot |B|$ -nél, azaz az A -ból B -be vezető monoton sorok számánál. Tehát a keresett (a, b) párok száma legalább

$$|A| \cdot \frac{|B|}{2^{n-1}} \geq |A| \cdot \frac{2^{n-1}}{2^{n-1}} = |A|.$$

A bizonyítandó állítás innen közvetlenül adódik az $|A| = 2^{n-1}$ feltételből. $\square$

Megjegyzések. 1. A II. megoldás gondolatmenete Molnár-Sáska Zoltán megoldásából származik. Lényegében ugyanez az érvelés rekonstruálható Matolcsi Dávid dolgozatából is.

2. Ahogy a II. megoldásban, tegyük fel ismét, hogy $A \subseteq Q$, $B = Q \setminus A$, valamint $|A| \leq 2^{n-1}$. A II. megoldásból könnyen levezethető, hogy az olyan (a, b) párok száma, amelyek csak egy tagban térnek el és $a \in A$, illetve $b \in B$, pontosan akkor egyenlő $|A|$ -val, ha $A = \emptyset$ vagy ha $|A| = 2^{n-1}$ és A mindazon sorozatok halmaza, amelyeknek egy konkrét tagja rögzített, a többit pedig az összes lehetséges módon választjuk.

3. A kitűzött feladat lényegében ekvivalens azzal az ismert ténnyel, hogy a hiperkocka ún. Cheeger-száma 1-gyel egyenlő.