

I. rész

1. Ágoston és Benedek egy-egy marék kavicsot tartanak a kezükben. Ha Benedek a sajátjai közül 10 kavicsot átadna Ágostonnak, akkor a kezükben tartott kavicsok számának szorzata 150-nel csökkenne. Ha Benedek nem 10, hanem 20 kavicsot adna át Ágostonnak, akkor a kezükben tartott kavicsok számának szorzata a harmadára csökkenne. Hány kavicsot tartottak a kezükben kezdetben? (12 pont)

2. Határozzuk meg az x értékét úgy, hogy az $x^2 + x - 2$, az $2x^2 + x + 3$ és a $4x^2 - 12$ kifejezések értéke ebben a sorrendben egy

- a) számtani;
- b) mértani

sorozat három egymást követő tagja legyen. (13 pont)

3. a) Legyen a és b egy-egy olyan egész szám, amelyeket véletlenszerűen választunk a $[-10; 10]$ intervallumból. Mekkora a valószínűsége, hogy az $y = ax + b$ egyenletű egyenes áthalad a $P(2; 6)$ ponton?

b) Legyen G egy hétpontú teljes gráf, csúcsai P, Q, R, S, T, U és V . Hány olyan négypontú köre van G -nek, amely P és Q közül legalább az egyik csúcson áthalad? (13 pont)

4. a) Mi lehet az alapszáma annak a számrendszernek, melyben teljesül az alábbi egyenlőtlenség?

$$1410 < 1254 + 135.$$

b) Egy n elemű halmaznak feleannyi 7 elemű részhalmaza van, mint 8 elemű. Határozzuk meg az n értékét. (13 pont)

II. rész

5. Három testvér betér egy fagyaltozóba. Nyolcféle fagyalt kapható: citrom, csokoládé, eper, karamell, meggy, puncs, sárgabarack és vanília.

(Az alábbi kérdéseknél a gombócok sorrendjétől minden esetben eltekintünk.)

a) Tünde három különböző ízű gombócot szeretne kérni. A puncsot nem szereti, ezért azt biztosan nem kér, a citrom viszont a kedvence, ha van, azt sosem mulasztja el. Hányféleképpen választhat Tünde?

b) Viola is háromgombócos fagyit eszik, de csak a csokoládét, a karamellt, a puncsot és a vaníliát szereti. Hányféleképpen választhat Viola, ha egy-egy ízből akár több gombóccal is ehet?

c) Zolinak mindegy, mit kap, ezért csak annyit mond a fagyaltosnak, hogy három különböző ízt szeretne. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a három gombóc közül pontosan kettő gyümölcsízű (citrom, eper, meggy vagy sárgabarack) lesz? (A fagyaltos a három gombóc ízét egymástól függetlenül, véletlenszerűen választja ki.)

d) Egy jó közelítéssel forgáskúp alakú tölcser alapkörének belső átmérője 58 mm, magassága 83 mm. Hány dkg $0,6 \text{ g/cm}^3$ sűrűségű fagyalt fér ebbe a tölcserbe, ha színültig töltjük? (16 pont)

6. Egy 20 cm sugarú körbe írt ABC hegyesszögű háromszög két oldala $AC = 34 \text{ cm}$ és $BC = 30 \text{ cm}$.

a) Határozzuk meg a háromszög AB oldalának hosszát.

b) Határozzuk meg a háromszög B csúcsához tartozó szögfelezőjének és súlyvonalának hosszát. (16 pont)

7. Van hatféle számkártyánk, mindegyikből 1-1 darab: 1, 2, 3, 4, 5, 6. A kártyákat véletlenszerűen sorba rendezve hatjegyű számokat képezünk.

a) Igazoljuk, hogy $\frac{4}{15}$ annak a valószínűsége, hogy az így kapott szám osztható lesz 12-vel.

b) Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy az így kapott szám a 6-os számjeggyel kezdődik, feltéve, hogy 12-vel osztható.

c) Egy papírlapra felírjuk a számkártyákból képezhető összes lehetséges hatjegyű számot.

Határozzuk meg a papírlapra felírt számok mediánját. (16 pont)

8. Gyurta Dániel 2009-ben, Rómában szerezte első világbajnoki aranyérmét a 200 méteres mellúszásban. Győztes ideje 2:07.64 volt (2 perc 7 másodperc 64 századmásodperc). Egyetlen századmásodperccel előzte meg az amerikai Eric Shanteau-t.

a) Határozzuk meg Gyurta Dániel átlagsebességét a teljes távon. A választ km/h-ban, egy tizedesjegy pontossággal adjuk meg.

b) Az úszók rendszerint gyorsabbak a táv elején. Gyurta Dániel a második 100 métert 1:05.50 alatt tette meg. Ezen belül az utolsó 50 méter megtételéhez 10 századmásodperccel több időre volt szüksége, mint a megelőző 50 méter megtételéhez. Határozzuk meg Gyurta Dániel idejét az utolsó 50 méteren.

c) Eric Shanteau az első 100 métert 1:01.22, a második 100 métert 1:06.43 alatt tette meg. Gyurta Dániel célba érkezésekor az amerikai úszónak még hány centiméter volt hátra a teljes távból? (Tételezzük fel, hogy a második 100 métert egyenletes tempóban tette meg a versenyző.) A választ egy tizedesjegy pontossággal adjuk meg.

d) Hugó, Hanna és Ödön, a három testvér ugyanabba az uszodába járnak úszóedzésre. Hugó (a legkisebb) a 20 méteres, Hanna a $33\frac{1}{3}$ méteres, Ödön az 50 méteres medencében edz. Az egyik edzésen Hanna négyvel több hosszt úszott, mint Ödön, Hugó pedig négyvel több hosszt úszott, mint Hanna. A Hugó, Hanna és Ödön által leúszott távolságok (ebben a sorrendben) egy növekvő számtani sorozat szomszédos tagjai.

Határozzuk meg mindhárom gyerek esetén az edzésen általa leúszott távolságot.

(16 pont)

9. Egy duatlon verseny rajtja egy egyenes tengerparton van, célja a vízben. Egyik lehetőség a táv teljesítésére, hogy először 4 km-t fut a versenyző a parton, majd 90 fokkal elfordulva 1 km-t úszik a tengerben. Azonban megengedett bármikor letérni a futópályáról és úszni kezdeni a cél felé.

a) Mennyi idő alatt ér célba Dénes, akinek a tengerparti homokban futva 8 km/h, a vízben úszva 1,5 km/h a sebessége, és 3,5 km lefutása után kezd el úszni a cél felé?

b) Juli sebessége futva 6 km/h, úszva 2 km/h. A 4 km-es futópálya vége előtt hány méterrel érdemes úszni kezdenie ahhoz, hogy a lehető leggyorsabban teljesítse a távot? Mekkora ez az idő?

(16 pont)