

Bevezetés

A matematika érettségi feladatsorokat és javítási útmutatókat készítő bizottság tagjai nincsenek könnyű helyzetben, amikor a matematikai precizitás és a vizsgázóktól reálisan elvárható igényesség között kell egyensúlyozniuk. Egyszerre kell, hogy megfeleljenek a szakma (középiskolai és felsőoktatási tanárok) elvárásainak, miközben nem veszíthetik szem elől azt a tény sem, hogy a diákok nagy része nem matematikusi pályára készül. A kétszintű érettségi bevezetése óta megfigyelhető, hogy a feladatsorokat és a javítási útmutatókat összeállító bizottság bizonyos kérdésekben nem alakított ki egységes álláspontot. Ez egyfelől nyilván a személyi változások következménye, másfelől viszont az érettségi vizsga jellegzetességéből fakad. Azáltal ugyanis, hogy a matematika érettségi vizsga – néhány feladattól eltekintve – nem teszt-jellegű, az egyes pontok megítélése bizonyos esetekben vita tárgyát képezheti.

A megoldások ellenőrzésének és a válasz megadásának kérdése az egyik olyan témakör, amelynek megítélése és kezelése nem egységes sem a matematikatanárok körében, sem az elmúlt évek érettségi feladatsorainak javítási útmutatóiban. Komoly dilemma, hogy miközben fő szabályként a feladatok megoldásának ellenőrzését várjuk, az sem lenne szerencsés, ha ennek a kompetenciának az értékelése túl nagy súlyt kapna az összpontszámában. A feladatsor elején, a vizsgázókhöz szóló *Fontos tudnivalók*-ban szerepel, hogy az eredményeket szöveges válaszként is meg kell fogalmazni, de az ehhez kapcsolódó pontos elvárások sem tisztázottak.

Az alábbiakban vázoljuk, hogy melyek azok az esetek, amikor véleményünk szerint lehet egyértelmű elvárásokat megfogalmazni, és jelezzük, hogy melyek azok a helyzetek, amikor erre nem látunk lehetőséget.

Ez az írás szándékosan tömör és lényegre törő. A tömörséget úgy próbáljuk enyhíteni, hogy a legfontosabb megállapítások mellé segítő példákat adunk. A témát részletesebben is kifejtettük, ez az anyag a Fazekas Mihály Gimnázium honlapján, ezen belül a Matematika oktatási portálon található meg².

Az ellenőrzés kérdése

A matematika feladatok egy részét egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek láncolatának felírásával oldjuk meg. A feladatban kitűzött probléma megoldása során felírt egyenletek, egyenletrendszerek, egyenlőtlenségek vagy ekvivalensek az eredeti problémával, vagy nem. (Két egyenletet – egyenletrendszert, egyenlőtlenséget –, illetve egy feladatot és egy egyenletet ekvivalensnek nevezünk, ha a megoldáshalmazuk megegyezik.)

Ha a vizsgázó *ekvivalens átalakításokat* hajt végre (értve ez alatt az eredeti feladattal való ekvivalenciát is), akkor befejezésként két lehetősége van: *vagy ennek a tényét kell rögzítenie, vagy a kapott gyököket ellenőriznie kell az eredeti feladatba történő behelyettesítéssel.*

Ha a vizsgázó *nem ekvivalens átalakításokat* végez, akkor *behelyettesítéssel kell ellenőriznie.* Az ellenőrzés célja nem a számolási hibák kiszűrése, hanem az, hogy megvizsgáljuk: a feladat megoldása során kapott gyökök az eredeti feladatnak is megoldásai-e. Az ellenőrzés megtörténtének megítélése a javító tanárra van bízva, de a fő szabály: a vizsgázó tevékenysége mögött érdemi munkának kell látszania, nem elég az ellenőrzés tényének megemlézése. (Így az „ekvivalens átalakításokat hajtottam végre” tanulói megállapításra csak akkor adható az ellenőrzésért járó pont, ha a vizsgázó valóban minden szükséges feltételt figyelembe vett.)

Három esetet különböztethetünk meg:

I. A „sima” egyenletek megoldása

A fenti felosztás (vagyis egy egyenlet megoldásának ekvivalenciája) általában egyértelmű azoknál a példáknál, ahol a feladat egy „sima” (közvetlen feladatként kitűzött) egyenlet megoldása.

II. A modellalkotást igénylő, szöveges feladatok megoldásának ellenőrzése

Összetettebb a kérdés az úgynevezett szöveges feladatok megoldása során. Ezek esetében ugyanis az ekvivalencia feltételeinek megállapítása jóval nehezebb lehet, mint a behelyettesítés elvégzése. Ezeknél a feladatoknál általában elvárás az ellenőrzés elvégzése, mégpedig az eredeti feladat szövegébe (tehát nem a felírt egyenletbe) történő behelyettesítéssel. Mint az előbb említettük, a vizsgázó dolgozatában ennek látható nyoma kell, hogy legyen. (Az utóbbi években megfigyelhető változás, hogy az értékelési útmutató az ellenőrzés végrehajtására vonatkozó részleteket is tartalmaz.)

III. Azoknak a feladatoknak a köre, ahol az egyenleteket eszközként alkalmazzuk.

Sok olyan feladat van, ahol a megoldás során egyenleteket oldunk meg (koszinusztétel felírása, alakzatok metszéspontjának meghatározása stb.), különösebb modellalkotás nélkül. Ezeknek a feladatoknak a megoldása során *általában* nem várjuk el az egyenletek megoldásának ellenőrzését. Ezt egyfelől a kialakult tanítási gyakorlat, másfelől az az elv támasztja alá, hogy ne legyen túlréprezentálva az ellenőrzési kompetencia a vizsga során (1. példa).

Néhány további megállapítás

¹ Ez a tanulmány a TÁMOP 3.1.1-11/1-2012-0001 XXI. századi közoktatás (fejlesztés, koordináció) II. szakasz keretében készült.

² <http://goo.gl/7VLzHz>.

Az elmúlt 10 évben kialakult szokás, hogy a középszintű érettségi I. részében az ellenőrzést az útmutató nem várja el, annak végrehajtásáért ott nem jár pont.

Azoknál a szöveges feladatoknál, melyek megoldása során egyszerű egyenleteket, egyenletrendszereket nyilvánvalóan ekvivalens lépésekkel old meg a vizsgázó, a válasz megadása helyettesítheti a visszahelyettesítéssel történő ellenőrzést vagy az ekvivalenciára való hivatkozást (2. példa).

Egyenlőtlenségeket algebrai úton csak ekvivalens átalakításokkal oldhat meg a vizsgázó, hiszen ilyenkor nincs lehetőség az általában végtelen számú gyök behelyettesítéssel történő ellenőrzésére.

Az egyenletrendszerek kezelése is külön vizsgálandó. Az egyenletrendszerek ekvivalenciájának bonyolult elméleti háttere van. (Elég itt most ebből annyit megemlíteni, hogy egyenletrendszerrel csak egyenletrendszer lehet ekvivalens.) A „sima” egyenletrendszerek (behelyettesítéssel történő) ellenőrzéséért általában jár pont (3. példa). Ha egy feladatban (pl. alakzatok metszéspontjának meghatározása) az egyenletrendszert eszközként használjuk, akkor általában nem várjuk el az ellenőrzést (4. példa).

Szintén problémát jelenthet az irracionális gyökök kezelése. Ezeknél nem fogadható el a közelítő értékük behelyettesítése az eredeti egyenletbe, csak az egyenletek ekvivalens átalakításai és az ezekre való hivatkozás, illetve a pontos értékkel történő visszahelyettesítés.

Egyenletek grafikus megoldása esetén pont jár a leolvasott értékek visszahelyettesítéséért az eredeti egyenletbe, ez a tanítási gyakorlat alapján a megoldás része.

Az ellenőrzés és válasz megadásának bármilyen sorrendje elfogadható.

- 15. a)** Egy számtani sorozat első tagja 5, differenciája 3. A sorozat első n tagjának összege 440. Adja meg n értékét!

15. a)		
(A szöveg alapján felírható egyenlet: $440 = \frac{2 \cdot 5 + (n-1) \cdot 3}{2} \cdot n$.)	1 pont	
Ebből $3n^2 + 7n - 880 = 0$.	2 pont	
A negatív gyök $\left(-\frac{55}{3}\right)$ a feladatnak nem megoldása.	1 pont	
$n = 16$	1 pont	
Összesen:	5 pont	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó a sorozat tagjait egyenként kiszámolva vizsgálja a kívánt összeg elérését, és jó eredményre jut, akkor a teljes pontszám jár.

1. példa (középszintű feladatsor, 2014. május), melynek a) feladata megoldása során az útmutató eltekint az egyenlet (pozitív egész) gyökének ellenőrzésétől

- 15.** Egy végzős osztály diákjai projekt munka keretében különböző statisztikai felméréseket készítettek az iskola tanulóinak körében.

- a)** Éva 150 diákot kérdezett meg otthonuk felszereltségéről. Felméréséből kiderült, hogy a megkérdezettek közül kétszer annyian rendelkeznek mikrohullámú sütővel, mint mosogatógéppel. Azt is megtudta, hogy 63-an mindkét géppel, 9-en egyik géppel sem rendelkeznek.
A megkérdezettek hány százalékának nincs otthon mikrohullámú sütője?

15. a) első megoldás		
A mosogatógéppel rendelkezők számát jelölje x , a mikrohullámú sütővel rendelkezők száma ekkor $2x$.	1 pont	
Valamelyik géppel 141-en rendelkeznek: $2x + x - 63 = 141$,	2 pont	
amiből $x = 68$.	1 pont	
Nincs mikrohullámú sütője $(150 - 2 \cdot 68 =)$ 14 megkérdezettnek,	1 pont	
ők az összes megkérdezett kb. 9,3%-át jelentik.	1 pont	
Összesen:	6 pont	

2. példa (középszintű feladatsor, 2013. október), melynek a) alfeladata megoldása során az útmutató eltekint a felírt egyenlet ellenőrzésétől. Ezt indokolja egyfelől az egyenlet egyszerűsége, másfelől az, hogy a kérdés megválaszolásával a vizsgázó tulajdonképpen ellenőrzi, hogy az általa megadott értékek megfelelnek a feladat feltételeinek

13. a) Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenletet!

$$x + 4 = \sqrt{4x + 21}$$

- b) Oldja meg az alábbi egyenletrendszert, ahol x és y valós számot jelöl!

$$\begin{cases} 3x + y = 16 \\ 5x - 2y = 45 \end{cases}$$

13. b) első megoldás		
(Behelyettesítő módszerrel:) $y = 16 - 3x$	1 pont	
$5x - 32 + 6x = 45$	1 pont	
$11x = 77$	1 pont	
$x = 7$	1 pont	
$y = -5$	1 pont	
Ellenőrzés.	1 pont	
Összesen:	6 pont	

3. példa (középszintű feladatsor, 2013. október), melynek b) alfeladata megoldása során az útmutató elvárja az egyenletrendszer ellenőrzését

17. Adott a koordináta-rendszerben két pont: $A(1; -3)$ és $B(7; -1)$.

- a) Írja fel az A és B pontokra illeszkedő e egyenes egyenletét!
- b) Számítással igazolja, hogy az A és B pont is illeszkedik az $x^2 + y^2 - 6x - 2y = 10$ egyenletű k körre, és számítsa ki az AB húr hosszát!

Az f egyenesről tudjuk, hogy illeszkedik az A pontra és merőleges az AB szakaszra.

- c) Számítsa ki a k kör és az f egyenes (A -tól különböző) metszéspontjának koordinátáit!

17. c) első megoldás		
Az f egyenes egy normálvektora: $\vec{AB}(6; 2)$	1 pont	
Az f egyenes egyenlete $3x + y = 0$.	2 pont	
A metszéspont koordinátáit a k kör és az f egyenes egyenletéből álló egyenletrendszer megoldásával kapjuk.	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha a megoldásból kiderül, hogy a vizsgázó gondolatmenete helyes volt.</i>
Az f egyenes egyenletéből $y = -3x$.	1 pont	
Ezt a kör egyenletébe helyettesítve: $x^2 + 9x^2 - 6x - 2 \cdot (-3x) = 10$.	1 pont	
$x^2 = 1$	1 pont	
Ennek (az 1-től különböző) megoldása $x = -1$.	1 pont	
Így a keresett pont a $C(-1; 3)$.	1 pont	
Összesen:	9 pont	

4. példa (középszintű feladatsor, 2013. október), melynek c) alfeladatának megoldása során az útmutató eltekint az egyenletrendszer megoldásának ellenőrzésétől

Összegzés

Úgy véljük, hogy az ellenőrzés kérdését illetően fent megfogalmazott véleményünk a kérdés kezelésének egységesítése irányába tett lépés. A diákokban a tanítás során kialakítandó önellenőrzési kompetenciát nagyon fontosnak tartjuk. Ennek az érettségi vizsga során történő számonkérése – a megfelelő arányban – szintén lényeges.

Azt javasoljuk, hogy a szaktanári munka során a diákoktól várjuk el a rendszeres ellenőrzést. A feladatsort és a hozzártartozó értékelési útmutatót összeállító bizottság azonban akkor jár el helyesen, ha az érettségi vizsgán az ellenőrzést csak ott értékeli pontokkal, ahol feltétlenül szükséges.