

Az Eötvös Loránd Fizikai Társulat 2016. évi Eötvös-versenye október 14-én délután 3 órai kezdettel tizennégy magyarországi helyszínen¹ került megrendezésre. Ezért külön köszönettel tartozunk mindazoknak, akik ebben szervezéssel, felügyelettel a segítségünkre voltak. A versenyen a három feladat megoldására 300 perc áll rendelkezésre, bármely írott vagy nyomtatott segédeszköz használható, de zsebszámológépen kívül minden elektronikus eszköz használata tilos. Az Eötvös-versenyen azok vehetnek részt, akik vagy középiskolai tanulók, vagy a verseny évében fejezték be középiskolai tanulmányaikat. Összesen 77 versenyző adott be dolgozatot, 18 egyetemista és 59 középiskolás.

Ismertetjük a feladatokat és azok megoldását.

*

1. feladat. *Vízszintes helyzetű, elegendően nagy méretű, téglalap alakú rajztáblán egy begrafitozott kicsiny pénzérme fekszik. A rajztáblát saját síkjában mozgatni kezdjük úgy, hogy középpontja R sugarú körön haladjon ω szögsebességgel, miközben oldalai az eredeti helyzetükkel mindvégig párhuzamosak maradnak. Az érme és a rajztábla közötti súrlódási együttható μ , melynek értéke elég kicsi ahhoz, hogy az érme folyamatosan csússzon.*

Hogyan mozog az érme hosszabb idő után? Milyen nyomot hagy eközben a rajztáblán?

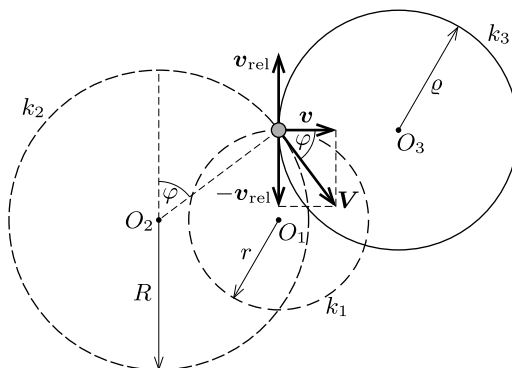
(Vigh Máté)

Megoldás. Ha a rajztábla és a pénzérme között a súrlódási tényező elegendően nagy lenne ($\mu > R\omega^2/g$), akkor a pénzérme nem csúszna meg, hanem a táblához tapadva követné annak mozgását. A feladat szövege szerint nem ez a helyzet, így a rajztábla indításakor a pénzérme azonnal megcsúszik. Sejtethető, hogy néhány periódusidőnyi átmeneti (tranzien) szakasz után az érme mozgása állandósul. Megmutatjuk, hogy az egyenletes körmozgást végző pénzérme kielégíti a Newton-féle mozgásegyenletet.

Az m tömegű pénzérmére vízszintes irányban egyetlen erő hat: a μmg nagyságú, de állandóan változó irányú csúszási súrlódási erő. Stacionárius körmozgás esetén az érme sebességének nagysága állandó, ezért a súrlódási erő mindig merőleges a sebességvektorra. A pénzérme körmozgásának szögsebessége nem lehet más, mint a rajztábla mozgásának ω körfrekvenciája. A körpálya r sugarát a mozgásegyenletből határozhatjuk meg:

$$(1) \quad \mu mg = mr\omega^2, \quad \text{ebből} \quad r = \frac{\mu g}{\omega^2}.$$

Érdekes, hogy r nem függ a rajztábla pályájának R sugarától.



1. ábra

Most térjünk rá arra a kérdésre, hogy milyen nyomot hagy az érme a rajztáblán! Ehhez a két test relatív mozgását kell elemezni. Az 1. ábrán látható r sugarú k_1 kör a pénzérme pályáját mutatja az álló vonatkoztatási rendszerben, az R sugarú k_2 kör a rajztábla éppen az érmével érintkező pontjának későbbi pályáját jelzi, végül pedig a ρ sugarú k_3 kör a táblán hagyott grafitnyomnak felel meg. Az érmére ható csúszási súrlódási erő az O_1 pont felé mutat, ezzel ellentétes tehát az érme rajztáblához viszonyított $\mathbf{v}_{\text{rel}}$ sebessége. Az érme álló vonatkoztatási rendszerhez viszonyított $\mathbf{v}$ sebessége viszont erre merőleges, így a rajztábla érmével éppen érintkező pontjának $\mathbf{V} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_{\text{rel}}$ sebességére fennáll a Pitagorasz-tétel:

$$(2) \quad V^2 = v^2 + v_{\text{rel}}^2.$$

Mivel az állandósult mozgásszakaszban mindhárom sebességvektor ω szögsebességgel forog az időben, a nagyságukat kifejezhetjük a körpályák sugarával:

$$|\mathbf{V}| = R\omega, \quad |\mathbf{v}| = r\omega, \quad |\mathbf{v}_{\text{rel}}| = \rho\omega,$$

amelyeket a (2) egyenletbe írva a sugarak között kapunk összefüggést:

$$R^2 = r^2 + \rho^2.$$

¹Részletek a verseny honlapján: <http://eik.bme.hu/~vanko/fizika/eotvos.htm>.

Ezt és az (1) eredményt felhasználva megkapjuk a pénzérme által a rajztáblán hagyott kör alakú grafitnyomok ϱ sugarát:

$$\varrho = \sqrt{R^2 - \left(\frac{\mu g}{\omega^2}\right)^2}.$$

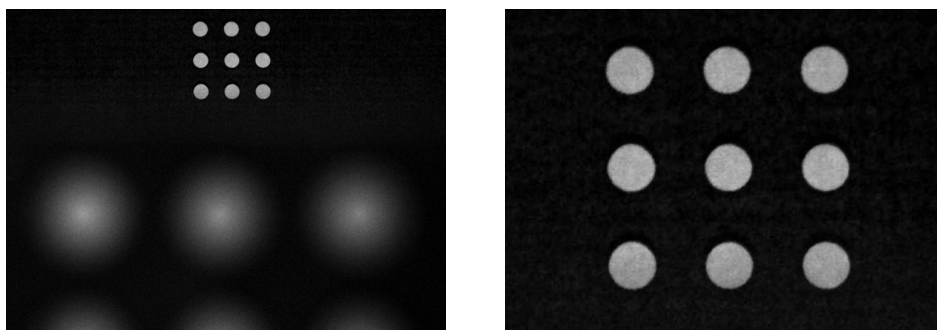
Az érme megcsúszásának $\mu < R\omega^2/g$ feltétele miatt ez mindig valós.

Megjegyzés. Az ábráról leolvasható, hogy az érme mozgása nincs szinkronban a rajztábla mozgásával, hanem ahhoz képest folyamatosan „késik”. A fáziskésés φ szögét is a sebességvektorok által kifeszített derékszögű háromszög segítségével határozhatjuk meg:

$$\cos \varphi = \frac{|\mathbf{v}|}{|\mathbf{V}|} = \frac{r}{R} = \frac{\mu g}{R\omega^2},$$

amely csúszó érme esetén biztosan kisebb 1-nél.

2. feladat. Két egyforma, fekete lapon kilenc-kilenc kicsi fehér pötty van. A szomszédos pöttyök középpontjának távolsága 5,8 mm. A lapokról egy fényképezőgéppel képet készítettünk: a fényképezőgép a távolabbi, a lencsétől 25 cm távolságra lévő lapról éles képet adott, a közelebbiről viszont elmosódott a kép (2. ábra). A bal oldali ábrán a teljes kép látható, a jobb oldali ábrán pedig a kép tetejének kinagyított részlete. A fényképezőgép lencséjének fókusz távolsága 18 mm.



2. ábra

Becsüljük meg a megadott és a képekről lement adatokból a közelebbi lap távolságát a lencsétől, valamint a fényképezőgép lencséjének átmérőjét!

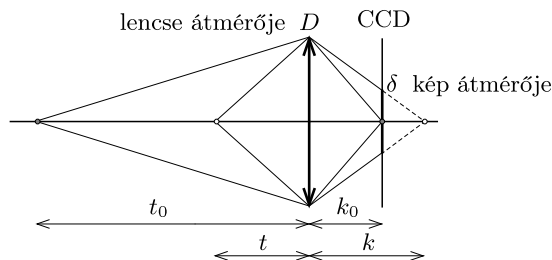
(Tichy Géza, Vankó Péter)

Megoldás. A feladat megoldásának lényege, hogy megértsük, miért lesz a közelebbi tárgy képe elmosódott. A 3. ábrán két pontszerű tárgy képe látható. A távolabbról a lencse pontosan a CCD érzékelő síkjában hoz létre éles, pontszerű képet. A közelebbiről viszont távolabb keletkezne éles kép, így a CCD-n egy elmosódott, δ átmérőjű folt keletkezik. Az ábráról leolvasható, hogy

$$\frac{D}{\delta} = \frac{k}{k - k_0},$$

a leképzési törvény alapján pedig:

$$\frac{1}{t_0} + \frac{1}{k_0} = \frac{1}{f} \quad \text{és} \quad \frac{1}{t} + \frac{1}{k} = \frac{1}{f}.$$

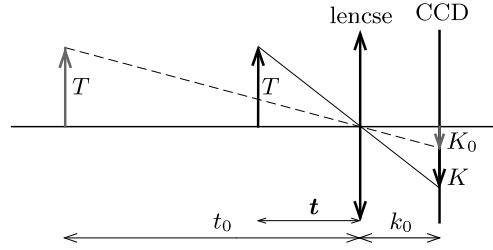


3. ábra

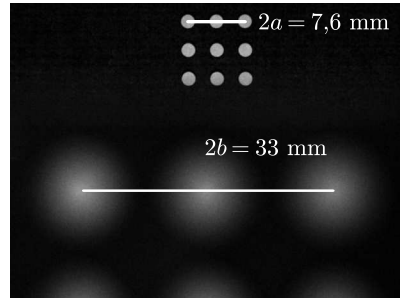
A 4. ábra alapján a közelebbi tárgy távolsága a két kép nagyításának arányából határozható meg:

$$\begin{aligned} \frac{K_0}{T} &= \frac{k_0}{t_0}, \\ \frac{K}{T} &= \frac{k_0}{t}, \\ \lambda &= \frac{K}{K_0} = \frac{t_0}{t}. \end{aligned}$$

A 2. ábra bal oldali részéről leolvasható a szélső pöttyök középpontjának távolsága (a szomszédos pöttyök távolságának kétszerese) mindkét képen (5. ábra).



4. ábra



5. ábra

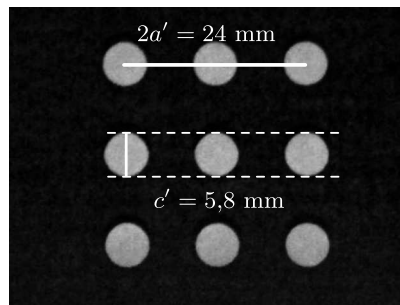
Ebből:

$$\lambda = \frac{K}{K_0} = \frac{2b}{2a} = \frac{33 \text{ mm}}{7,6 \text{ mm}} = 4,34,$$

$$t = \frac{t_0}{\lambda} = \frac{25 \text{ cm}}{4,34} = 5,8 \text{ cm}.$$

A 2. ábra jobb oldali (nagyított) részén leolvasható a pöttyök átmérőjének és távolságának aránya (6. ábra). Ebből:

$$\varrho = \frac{c'}{a'} = 2 \frac{c'}{2a'} = 2 \cdot \frac{5,8 \text{ mm}}{24 \text{ mm}} = 0,48.$$



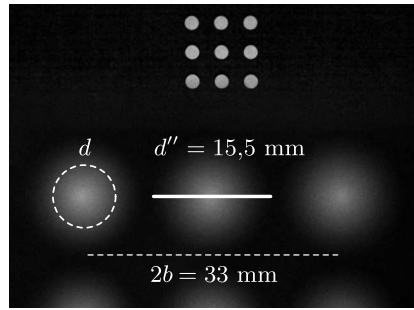
6. ábra

Ez alapján kiszámíthatjuk, hogy mekkora lenne a 2. ábra bal oldali felén a közelebbi pöttyök átmérője, ha nem lenne elmosódva (7. ábra):

$$d = \varrho b = \varrho \frac{2b}{2} = 0,48 \cdot \frac{33 \text{ mm}}{2} = 8,0 \text{ mm}.$$

Ugyanitt leolvasható az elmosódott kép átmérője is: $d'' = 15,5 \text{ mm}$. A két átmérő különbsége a kép elmosódottsága (ekkora lenne egy pontszerű tárgy elmosódott képe ezen a képen):

$$e = d'' - d = 7,5 \text{ mm}.$$



7. ábra

Ezután már csak néhány számítás van hátra. A 3. ábrán jelölt képtávolságok:

$$k_0 = \frac{t_0 f}{t_0 - f} = 19,4 \text{ mm},$$

$$k = \frac{t f}{t - f} = 26,2 \text{ mm}.$$

Két pötty távolsága a fényképezőgép CCD érzékelőjén (ez a távolság a valóságban $a_0 = 5,8 \text{ mm}$, meg van adva):

$$a_{\text{CCD}} = \frac{k_0}{t_0} a_0 = \frac{19,4 \text{ mm}}{250 \text{ mm}} \cdot 5,8 \text{ mm} = 0,45 \text{ mm},$$

amiből a 2. ábra bal oldali képének nagyítása a CCD-n kialakuló képhez viszonyítva:

$$N = \frac{a}{a_{\text{CCD}}} = \frac{2a}{2a_{\text{CCD}}} = \frac{7,6 \text{ mm}}{2 \cdot 0,45 \text{ mm}} = 8,4.$$

Ebből az elmosódottság a CCD érzékelőn:

$$\delta = \frac{e}{N} = \frac{7,5 \text{ mm}}{8,4} = 0,9 \text{ mm},$$

amiből viszont a keresett lencseátmérő a 3. ábra alapján:

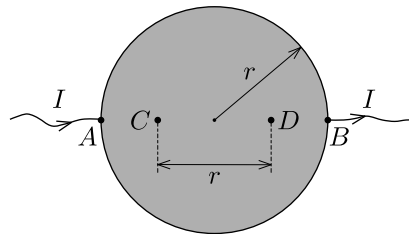
$$D = \delta \frac{k}{k - k_0} \approx 3,5 \text{ mm}.$$

Megjegyzések. 1. A kért mennyiségek hibájára csak becslést adunk. A lehető legpontosabb (tized mm-es) leolvasás és egy kicsit „nagyvonalúbb” (fél mm pontos) leolvasás adataival is végigszámolva azt kapjuk, hogy a közelebbi tárgy távolságára kapott eredmény hibája 1–2%, a lencse átmérő hibája pedig 10–15%.

2. A közelebbi tárgy távolságát azért kérdeztük, hogy segítsük a gondolatmenetet. Ezt több versenyző is meghatározta, de nem tudtak továbblépni. Egyetlen helyes megoldón kívül szinte senki nem tudta helyesen értelmezni a kép elmosódottságát; néhányan a fény elhajlásával próbálták megmagyarázni, ami szintén helytelen.

3. feladat. Egy r sugarú, d vastagságú ($d \ll r$), ρ fajlagos ellenállású fémkorong A pontjába I erősségű áramot vezetünk, B pontjából pedig elvezetjük azt.

Mekkora feszültség mérhető a 8. ábrán látható C és D pontok között?



8. ábra

Megoldás. A fémkorong vizsgálata előtt érdemes egy végtelen fémlapz esetéből kiindulni. Képzeljük el, hogy egy végtelen fémlap A pontjába $2I$ áramot vezetünk, a B pontból pedig elvezetjük azt. Ha csak az A jelű elektróda lenne jelen, a fémlapban a bevezetett áram izotrop módon terjedne szét, így az A ponttól r_1 távolságra az áramsűrűség nagysága

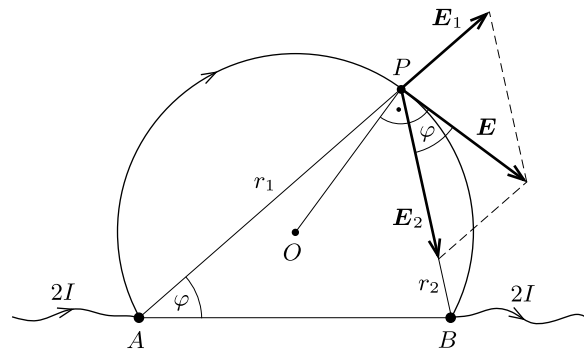
$$j_1 = \frac{2I}{2\pi r_1 d}$$

lenne. A differenciális Ohm-törvény értelmében ezt az áramsűrűséget a lemezben megjelenő $E_1 = \rho j_1$ térerősségű elektromos mező tartja fenn, így az A elektróda hatására a végtelen fémlemezben az r_1 távolsággal fordítottan arányos erősségű, az A ponttal ellentétes irányba mutató, „sugaras” elektromos mező alakul ki. Hasonlóan, ha csak a B jelű csatlakozó lenne jelen, akkor r_2 távolságban $E_2 = 2\rho I/(2\pi r_2 d)$ térerősségű, a B pont felé mutató elektromos tér jönne létre. Mivel mindkét elektróda jelen van, így a lemezben kialakuló elektromos tér (és áramsűrűség) az előbbi két eset szuperpozíciójaként (vektori összegeként) számolható.

Tekintsük most a végtelen fémlemez tetszőleges P pontját (lásd a 9. ábrát)! Itt az A és B elektródák hatására külön-külön $\mathbf{E}_1$ és $\mathbf{E}_2$ térerősség alakul ki, melyek nagyságára az eddigiek szerint fennáll az

$$\frac{|\mathbf{E}_1|}{|\mathbf{E}_2|} = \frac{r_2}{r_1}$$

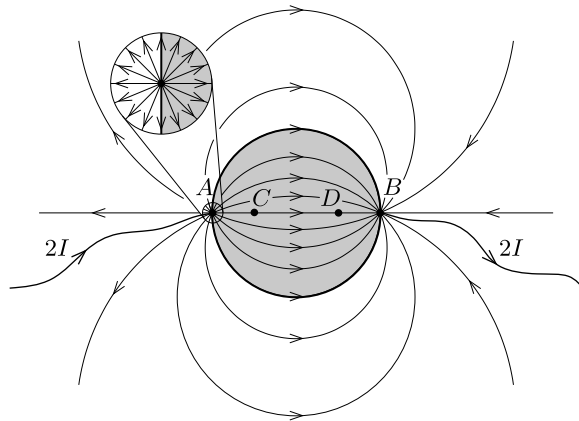
egyenlőség. Ebből és a váltószögek egyenlőségéből látszik, hogy az ABP háromszög hasonló a térerősségvektorok által meghatározott háromszöghöz, ezért az eredő térerősségvektor a PB szakasszal ugyanakkora szöget zár be, mint a PAB szög. Ez viszont azt jelenti, hogy az ABP háromszög (O középpontú) köréírt körét a P pontbeli eredő térerősség érinti, hiszen van két szögünk ($PAB \angle$, illetve az $\mathbf{E}$ és $\mathbf{E}_2$ vektorok által bezárt szög), melyek egyenlőségük miatt a kör ugyanazon PB ívéhez tartozó kerületi szögek.



9. ábra

A fentiekből következik, hogy az eredő térerősségvektor a fémsík tetszőleges pontjában érintője az A , B és a ki-szemelt pontra illeszkedő körívnek, a lemezben kialakuló elektromos erővonalak (és így az áramvonalak is) tehát *körív alakúak*, melyek átmennek az A és B pontokon.

Most vágjuk ki gondolatban a végtelen fémlapból a 10. ábrán látható, a feladatnak megfelelő korong alakú részt! A korong pereme mentén az áramok a kivágás előtt is érintő irányban folytak, így az áramokra kirótt határfeltétel automatikusan teljesül. A korong kivágása tehát nem változtatja meg sem a külső, sem a belső árameloszlást, és így a feszültségviszonyokat sem. A végtelen fémlapban az áram be- és kivezeti pontjának közvetlen közelében az áram-eloszlás izotrop volt (itt a távolabbi elektróda hatása már nem érződik), így a korong kivágása előtt a fémlemezbe vezetett $2I$ erősségű áramnak pontosan a fele jutott be a korongba (lásd a 10. ábra kinagyított részletét). A feladatbeli kérdés tehát egyenértékű azzal, hogy mekkora volt a feszültség a végtelen fémlap C és D pontjai között a korong kivágása előtt.



10. ábra

Az A pontban bevezetett $2I$ áram hatására az elektródától r távolságra a fémlap potenciálja (az A és B pontok között felúton, a korong középpontjában elhelyezkedő referenciaponthoz képest) a térerősség integrálásával kapható meg:

$$\Phi(r_1) = \int_{r_1}^{r_0} E_1(r') dr' = \frac{2\rho I}{2\pi d} \int_{r_1}^{r_0} \frac{1}{r'} dr' = -\frac{\rho I}{\pi d} \ln \frac{r_1}{r_0},$$

ahol $r_0 = r$. Ennek felhasználásával az A pontbeli elektróda által a C és D pontok között létrehozott feszültség nagysága

$$U_{CD}^{(A)} = \frac{\rho I}{\pi d} \left(-\ln \frac{r}{2r_0} + \ln \frac{3r}{2r_0} \right) = \frac{\rho I}{\pi d} \ln 3.$$

Ugyanekkora potenciálkülönbséget hoz létre a B jelű elektróda is, így a szuperpozíció értelmében a C és D pontok között eső feszültség

$$U_{CD} = U_{CD}^{(A)} + U_{CD}^{(B)} = 2U_{CD}^{(A)} = \frac{2\rho I}{\pi d} \ln 3.$$

Ekkora tehát a kivágott fémkorong C és D pontjai közötti feszültség is.

*

Az ünnepélyes eredményhirdetésre és díjkiosztásra 2016. november 18-án délután került sor az ELTE TTK Konferenciateremben. Meghívást kaptak az 50 és 25 évvel ezelőtti Eötvös-verseny nyertesei is. Jelen volt az 50 évvel ezelőtti győztes *Rácz Miklós* és a 25 évvel ezelőtti díjazottak közül *Gefferth András*, *Miklós György* és *Rózsa Balázs*. Utóbbi az akkori feladatok ismertetése után röviden beszélt a versennyel kapcsolatos emlékeiről és pályájáról.

Ezután következett a 2016. évi verseny feladatainak és megoldásainak bemutatása. Az 1. és 3. feladat megoldását Tichy Géza, a 2. feladatét Vankó Péter ismertette.

Az esemény végén került sor az eredményhirdetésre. A díjakat *Patkós András*, az Eötvös Loránd Fizikai Társulat elnöke adta át.

Egyetlen versenyző sem oldotta meg mindhárom feladatot, így a versenybizottság nem adott ki első díjat.

Két feladat helyes megoldásáért *második díjat* nyert **Kovács Péter Tamás**, a Zalaegerszegi Zrínyi Miklós Gimnázium 12. osztályos tanulója, *Juhász Tibor* és *Pálovics Róbert* tanítványa valamint **Tompa Tamás Lajos**, a miskolci Földes Ferenc Gimnázium 12. osztályos tanulója, *Zámborszky Ferenc* és *Kovács Benedek* tanítványa.

Egy feladat helyes megoldásáért *harmadik díjat* nyert **Forrai Botond**, a budapesti Baár-Madas Református Gimnázium érettségizett tanulója, *Horváth Norbert* tanítványa – a BME fizikus hallgatója; **Lajkó Kálmán**, a Szegedi Radnóti Miklós Kísérleti Gimnázium 12. osztályos tanulója, *Mező Tamás* tanítványa, valamint **Simon Dániel Gábor**, a Kecskeméti Bányai Júlia Gimnázium 11. osztályos tanulója, *Bakk János* tanítványa.

A második díjjal *Zimányi Gergely* adományából nettó 40 ezer, a harmadik díjjal nettó 25 ezer forint pénzjutalom járt, a díjazottak tanárai pedig a Typotex Kiadó könyvutalványait kapták. A verseny megszervezését az Eötvös Loránd Fizikai Társulat a MOL támogatásából fedezte.