

Megoldásvázlatok a 2015/4. sz. emelt szintű gyakorló feladataihoz

I. rész

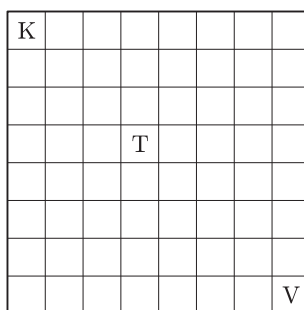
1. Bizonyítsuk be, hogy $\lg 2$ irracionális.

(11 pont)

Megoldás. Bizonyításunk indirekt. Abból indulunk ki, hogy $\lg 2$ pozitív valós szám. Ha $\lg 2$ racionális szám volna, akkor felírható lenne p/q alakban, ahol p és q pozitív egész számok. A logaritmus fogalma alapján ekkor $10^{\frac{p}{q}} = 2$, mindkét oldalt q -adik hatványra emelve $10^p = 2^q$.

Mivel 10^p osztható 5-tel, 2^q viszont nem, ezért az egyenlőség nem állhat fenn. $\lg 2$ tehát nem lehet racionális, ami egy valós szám esetében azt is jelenti, hogy irracionális.

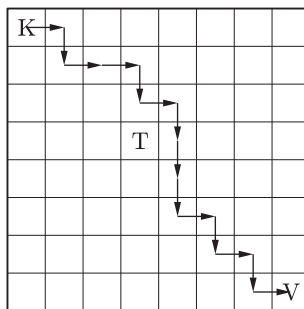
2. a) Hány különböző útvonalon juthatunk el a 8×8 -as sakktablán a bal felső sarokban lévő, az ábrán K-val jelölt mezőről a jobb alsó sarokban lévő, V-val jelölt mezőre, ha bármely érintett mezőről csak az alatta lévő, vagy a jobb oldalán lévő mezőre léphetünk?



b) Hány olyan útvonal van ezek között, amely a kiinduló mezőtől számított negyedik oszlop és negyedik sor kereszteződésében lévő, T-val jelölt mezőt nem érinti?

(12 pont)

Megoldás. a) Az 1. ábra illusztrációképpen egy lehetséges útvonalat mutat.



1. ábra

Az útvonalat leírhatjuk egy j (jobbra) és l (lefelé) betűkből álló jelsorozattal is:

jlljljljljljlj.

Bármely útvonal, amely a szabályoknak megfelel, összesen 14 lépésből áll; ezek közül 7 történik jobbra és 7 lefelé. Annyi különböző útvonal van, ahány különböző jelsorozat, mivel a megfelelés kölcsönösen egyértelmű.

A különböző útvonalak száma az ismétléses permutációk szerint: $P_{14(7;7)}^{\text{ism}} = \frac{14!}{7!7!} = 3432$.

Ugyanerre az eredményre jutunk, ha a $C_{14;7} = \binom{14}{7}$ kombinációkat vesszük alapul.

b) A kérdés megválaszolásához kiszámítjuk, hogy hány különböző útvonal halad át a negyedik oszlop negyedik sorában lévő mezőn (T), és ezt a számot levonjuk az előbb kapott 3432-ből.

A kiinduló K mezőből összesen 6 lépéssel jutunk a T mezőre, és ez $\binom{6}{3} = 20$ -féleképpen történhet. Innen a V-val jelölt végállomásra $\binom{8}{4} = 70$ -féleképpen juthatunk el. Az első útszakasz bármelyikéhez a második bármelyike párosítható, ezért $20 \cdot 70 = 1400$ útvonal érinti a T mezőt. Ebből következik, hogy $3432 - 1400 = 2032$ viszont nem érinti.

3. a) Bizonyítsuk be, hogy ha az (a_n) végtelen számtani sorozat elemei természetes számok és ezek között van köbszám, akkor a sorozatnak végtelen sok köbszám eleme van.

b) Ha például a sorozatban szerepel a 125, és a sorozat differenciája 3, akkor lehet-e 125-nél kisebb köbszám a sorozatban? (10 + 4 pont)

Megoldás. a) Legyen a sorozat köbszám eleme $a_k = c^3$ ($c \geq 0$ egész szám) és d a sorozat differenciája. Ezek ismeretében kiszámíthatjuk

$$c^3 + (3c^2 + 3cd + d^2)d$$

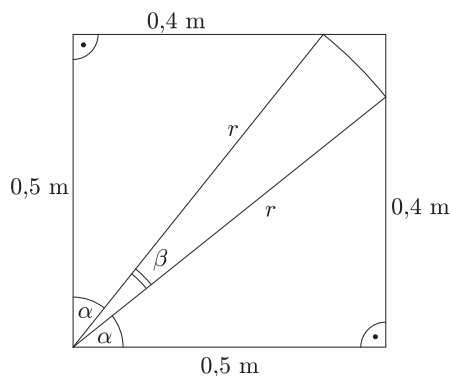
értékét. Nyilvánvaló, hogy ez sorozatunk eleme, és ez is köbszám, mégpedig $(c + d)^3$.

Könnyen látható ugyanilyen alapon, hogy $(c + 2d)^3$, $(c + 3d)^3$, ... szintén elemei a sorozatnak.

b) 125-nél kisebb nem negatív köbszámok a 0, 1, 8, 27 és 64. Mivel a sorozat differenciája 3, ezek közül csak azok jöhetnek szóba, amelyeknek 125-től való eltérése osztható 3-mal. Ebből a szempontból csak a 8 felel meg. Mármint ha teljesül, hogy a sorozat kezdő eleme $a_1 \leq 8$, akkor van a sorozatnak 125-nél kisebb köbszám eleme, egyébként nincs.

4. Bútorok hegyes sarkai sérülést okozhatnak. Különösen kisgyermekekre jelentenek veszélyt egy asztal sarkai. Éppen ezért az $1 \text{ m} \times 1 \text{ m}$ -es asztalunk lapját lekerekítettük az asztallap síkjára merőlegesen tartott fűrészszel olyan körívek mentén, amelyek középpontja egybeesik a négyzet alakú felület középpontjával. A négy oldalél mindegyikéből 80 cm hosszú egyenes szakasz maradt meg. Az egyenletes vastagságú asztallap tömege eredetileg 7 kg volt. Mekkora lett a tömege az átalakítás után? (14 pont)

Megoldás. Osszuk az asztallapot négy egybevágó részre a középvonalak mentén. A négy negyed egyikét a 2. ábra mutatja.



2. ábra

Az ábrázolt felület két derékszögű háromszögből és egy r sugarú körcikkéből áll. A háromszögek területe együttvéve $0,2 \text{ m}^2$. A körcikk középponti szöge $\beta = 90^\circ - 2\alpha$, ahol $\text{tg } \alpha = 0,8$. Innen a szögek két tizedesjegy pontossággal:

$$\alpha = 38,66^\circ \quad \text{és} \quad \beta = 12,68^\circ.$$

A körcikk területe

$$\pi r^2 \cdot \frac{\beta}{360^\circ} = \pi \cdot 0,41 \text{ m}^2 \cdot \frac{12,68^\circ}{360^\circ} \approx 0,045 \text{ 368 m}^2,$$

mivel $r^2 = (0,5^2 + 0,4^2) \text{ m}^2 = 0,41 \text{ m}^2$.

Az asztallap tömege arányos területének nagyságával, amely eredetileg 1 m^2 volt és $4 \cdot (0,2 + 0,0453 \text{ 68}) \text{ m}^2 = 0,981 \text{ 47 m}^2$ lett, a kérdéses tömeg ezért $7 \text{ kg} \cdot 0,981 \text{ 47} = 6,870 \text{ kg}$.

II. rész

5. Egy dobókockával kétszer dobunk.

a) Hány elemi esemény alkotja az eseményteret?

b) Mekkora annak a valószínűsége, hogy a dobott számok összege legalább 9?

c) Mekkora annak a feltételes valószínűsége, hogy a dobott számok összege legalább 9, ha az első dobott szám legfeljebb 5?

d) Mekkora annak a feltételes valószínűsége, hogy a dobott számok összege legalább 9, ha az első dobott szám legfeljebb 4? (2 + 4 + 5 + 5 pont)

Megoldás. a) Az eseményteret 36 elemi esemény alkotja, amelyet egy 6×6 -os táblázattal szemléltetünk (3. ábra). Ez a további kérdések megválaszolásához is hasznos lesz.

	1;1	1;2	1;3	1;4	1;5	1;6
	2;1	2;2	2;3	2;4	2;5	2;6
	3;1	3;2	3;3	3;4	3;5	3;6
B_2	4;1	4;2	4;3	4;4	4;5	4;6
////	5;1	5;2	5;3	5;4	5;5	5;6
	6;1	6;2	6;3	6;4	6;5	6;6
					B_1	////

3. ábra

b) A klasszikus valószínűség szerint $P = \frac{k}{n}$ (a kedvező esetek száma osztva a lehetséges esetek számával). Jelölje A azt az eseményt, hogy a dobott számok összege legalább 9. A kedvező esetek száma $k = 10$ és $P(A) = \frac{10}{36} = 0,277$.

c) Az A esemény feltételes valószínűsége a B eseményre mint feltételre vonatkozóan: $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$. B_1 jelölje azt az eseményt, hogy az első dobott szám legalább 5. $P(B_1) = \frac{1}{3}$. Az AB_1 esemény az A és a B_1 halmaz közös része 7 elemi eseményt tartalmaz. $P(AB_1) = \frac{7}{36}$,

$$P(A|B_1) = \frac{\frac{7}{36}}{\frac{1}{3}} = \frac{7}{12} = 0,583.$$

d) Jelölje B_2 azt az eseményt, hogy az első dobott szám legfeljebb 4. $P(B_2) = \frac{2}{3}$. Az AB_2 eseményt 3 elemi esemény alkotja.

$$P(AB_2) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12} \quad \text{és} \quad P(A|B_2) = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{8} = 0,125.$$

A $P(A)$, $P(A|B_1)$ és $P(A|B_2)$ valószínűségeket összehasonlítva megállapítható, hogy a feltételként szereplő esemény a valószínűségeket jelentősen befolyásolhatja kedvező vagy kedvezőtlen irányban is.

Megjegyezzük, hogy a feltételes valószínűség meghatározásánál a feltételül szabott esemény tulajdonképpen a biztos esemény szerepét veszi át. Például a d) pontban vizsgált esetben úgy is számolhatunk, hogy B_2 24 elemi eseményből álló eseménytér, amelyen belül a kedvező esetek száma 3, a valószínűség pedig $\frac{3}{24} = \frac{1}{8}$.

6. Az $f(x) = x^3 + ax^2 + 2x$ függvényről tudjuk, hogy inflexiós érintője párhuzamos az $x + y = 0$ egyenletű egyenessel. Határozzuk meg az a együttható értékét. Igazoljuk, hogy a függvény inflexiós pontja az x -tengelyen van. (16 pont)

Megoldás. Az $f(x)$ függvény első deriváltja: $f'(x) = 3x^2 + 2ax + 2$. Ez bármely helyen megadja az érintő meredekségét.

A második derivált: $f''(x) = 6x + 2a$. $f''(x) = 0$, ha $x_0 = -\frac{a}{3}$. Itt a függvénynek inflexiós pontja van, mivel $f''(x)$ x_0 -nál előjelet vált (negatívból pozitívba).

Az inflexiós érintő meredeksége az $x + y = 0$ egyenletű egyenessel való párhuzamosság folytán -1 . Tehát

$$f'(x_0) = 3 \cdot \frac{a^2}{9} - 2 \cdot \frac{a^2}{3} + 2 = -1,$$

innen $a^2 = 9$, vagyis $a_1 = 3$, $a_2 = -3$.

Ha $a_1 = 3$, akkor $x_{01} = -1$ és $f(x_{01}) = 0$.

Ha pedig $a_2 = -3$, akkor $x_{02} = 1$ és $f(x_{02})$ szintén egyenlő 0-val, tehát az inflexiós pont mindkét esetben az x -tengelyen van.

7. Bizonyítsuk be, hogy

$$\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x} \leq \sqrt[4]{8},$$

ha $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

(16 pont)

Megoldás. Mivel a bizonyítandó egyenlőtlenség mindkét oldalán pozitív mennyiségek állnak, ezek négyzetei között fennálló reláció az eredeti egyenlőtlenségre is igaz. Tehát elég azt bizonyítani, hogy

$$\sin x + \cos x + 2\sqrt{\sin x \cdot \cos x} \leq \sqrt{8} \quad \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right).$$

$$(1) \quad \sin x + \cos x = \sqrt{(\sin x + \cos x)^2} = \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x} = \sqrt{1 + \sin 2x} \leq \sqrt{2}$$

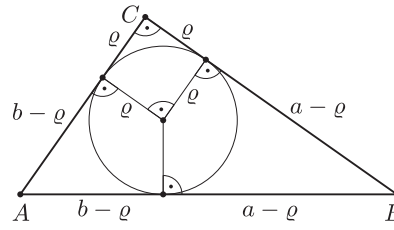
és

$$(2) \quad 2\sqrt{\sin x \cos x} = \sqrt{2}\sqrt{\sin 2x} \leq \sqrt{2},$$

ezért a bal oldal $2\sqrt{2}$ -nél, vagyis $\sqrt{8}$ -nál nem lehet nagyobb.

8. Szerkesszünk derékszögű háromszöget, ha adott a beírt és a körülírt körének sugara. Mi a megoldhatóság feltétele? (Elegendő a szerkesztés menetét leírni.) (16 pont)

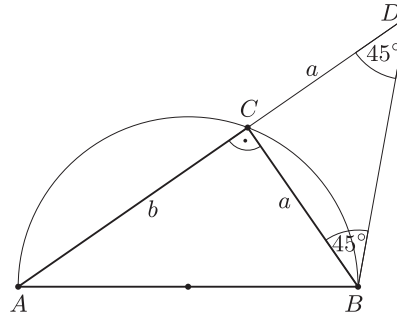
Megoldás. Jelölje ϱ a beírt, r pedig a körülírt kör sugarát. (A derékszögű háromszög oldalait a szokásos módon jelöljük.) A Thalész-tétel értelmében $c = 2r$. A beírt kör sugarára fennáll: $c = a + b - 2\varrho$. Ehhez azt kell látni (4. ábra), hogy a derékszög csúcsánál kialakul egy ϱ oldalú négyzet, továbbá azt, hogy külső pontból egy körhöz húzott érintőszakaszok egyenlők.



4. ábra

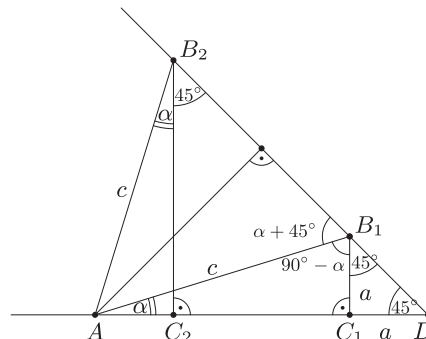
A felírt összefüggésekből $2(r + \varrho) = a + b$.

A feladat ezek után úgy is szólhatna, hogy szerkesszünk derékszögű háromszöget, ha adott az átfogója és a két befogó összege. Ehhez a 5. ábra ad segítséget. Az ABC derékszögű háromszög b befogójának meghosszabbítására felmértük az a befogót: $AD = a + b$.



5. ábra

Mivel BCD egyenlő szárú derékszögű háromszög, a D -nél fekvő szöge 45° . Ezek alapján a szerkesztés menete a következő. Egy 45° -os szög egyik szárára a D csúcsból kiindulva felmérjük az $a + b$ hosszúságú szakaszt: így kapjuk az A pontot. A másik szárból kivetsszük azt a B pontot, amely az A ponttól $c = 2r$ távolságra van. Mivel az ABD háromszög megszerkesztéséhez két oldal és a kisebbikkel szemközti szög áll rendelkezésre (nem egybevágósági alapeset), általában két megfelelő csúcspont, B_1 és B_2 adódik (6. ábra).



6. ábra

A megszerkeszteni kívánt ABC derékszögű háromszög C csúcsát a B_1 , illetve a B_2 pontból az AD szakaszra bocsátott merőlegesek C_1 , illetve C_2 talppontja adja. Habár két háromszöget kaptunk, a megoldás egyértelmű, mivel az AB_1C_1 és AB_2C_2 háromszögek egybevágók. Ezt az átfogók és az α -val jelölt hegyesszögek egyenlősége biztosítja. (Az α szög az AB_2C_2 háromszögben a B_2 csúcsnál fekszik.)

Abban az esetben, ha $c\sqrt{2} = a + b$, akkor B_1 és B_2 egybeesik: az ABC háromszög egyenlő szárú.

Ha $c\sqrt{2} < a + b$, akkor nincs megoldás.

Más szóval a megoldhatóság feltétele: $2r\sqrt{2} \geq 2(r + \varrho)$, vagyis $\varrho \leq r(\sqrt{2} - 1)$.

9. Egy harckocsizó alakulatnál szolgáló férfiak 40 fős csoportjában a testmagasság (x_i) és a testtömeg (y_i) adatait a következő táblázat tartalmazza:

testmagasság x_i [cm]	testtömeg y_i [kg]
162	70, 77
163	61
164	58, 64, 68
165	73
166	62, 65, 70
167	65, 66, 75, 80
168	63, 69, 71, 79
169	64, 70, 75, 76
170	58, 61, 71, 75, 75, 88
171	67, 68, 75, 77
172	61, 65, 70, 84
173	58, 77
174	63, 80

a) Ha a kg-ban mért testtömeget a m-ben mért testmagasság négyzetével elosztjuk, akkor az úgynevezett testtömeg-indexet kapjuk. A katonaeorvos egy bizonyos egész számnál nagyobb testtömeg-index esetén minősít valakit túlsúlyosnak. Mekkora ez az érték, ha az orvos szerint a szóbanforgó csoportban a túlsúlyosok aránya 10%?

b) Számítsuk ki az $\bar{x}$ és $\bar{y}$ átlagokat. Jelölje u azoknak az (x_i, y_i) értékpároknak a számát, amelyeknél a két adat az átlaghoz képest ugyanabban az irányban tér el, v pedig azoknak a számát, ahol az eltérés ellentétes irányú. Számítsuk ki az $\frac{u-v}{u+v}$ hányadost. Mire következtethetünk ebből? (8 + 8 pont)

Megoldás. a) Azt a négy egyént kell megtalálnunk, akiknek a testtömeg-indexe a 40 fős alakulatban a legnagyobb. Ezek:

x_i	y_i	Index
170	88	30,45
162	77	29,34
167	80	28,69
172	84	28,39

A következő (168; 79) már csak 27,99.

Természetesen ehhez nem szükséges mind a negyven adatot kiszámítani, de azért körültekintően kell eljárni.

Az orvos tehát 28-nál nagyobb testtömeg-index esetén minősít valakit túlsúlyosnak.

b) Az átlagok:

$$\bar{x} = \frac{6744}{40} = 168,6 \text{ cm,}$$

$$\bar{y} = \frac{2794}{40} = 69,85 \text{ kg.}$$

Az adatpárokat négy kategóriába sorolva:

x_i [cm]; y_i [kg]	Gyakoriság	
$x_i < 169; y_i < 70$	 	10
$x_i \geq 169; y_i \geq 70$	  	13
$x_i < 169; y_i \geq 70$	 	8
$x_i \geq 169; y_i < 70$	 	9

$\left. \begin{array}{l} u = 23 \\ v = 17 \end{array} \right\}$

A keresett hányados: $\frac{u-v}{u+v} = \frac{6}{40} = 0,15$. Ez azt jelzi, hogy a testmagasság és a testtömeg között milyen szoros a kapcsolat. Értéke nyilván $+1$ és -1 között mozoghat. Ha x_i és y_i minden esetben ugyanabba az irányba térne el az átlagtól, akkor $+1$, ha pedig minden esetben ellentétes irányú lenne az eltérés, akkor -1 volna az értéke. Ezek nagyon erős összefüggést jelentenének. Ha viszont a hányados 0 , akkor a két jellemző egymástól függetlennek tekinthető.

Esetünkben a $0,15$ -os érték azt mutatja, hogy a testmagasság és testtömeg között meglepően gyenge a kapcsolat, bár igaz, hogy az átlagosnál magasabb egyének körében az átlagosnál nagyobb tömegűek felé billen a mérleg.